Probabilités

Lois Usuelles Discrètes

Mohamad GHASSANY

EFREI PARIS

Loi Uniforme Discrète $\mathcal{U}(n)$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Loi Géométrique ou de Pascal $\mathcal{G}(p)$

Loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(r, p)$

Loi Uniforme Discrète $\mathcal{U}(n)$

Définition

Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables. Si n est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire alors on a:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

On dit $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Exemple

La distribution des chiffres obtenus au lancer de dé (si ce dernier est non pipé) suit une loi uniforme dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Moments de loi uniforme discrète

Cas particulier

Dans le cas particulier d'une loi uniforme discrète où chaque valeur de la variable aléatoire X correspond à son rang, i.e. $x_i = i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, on a:

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Démonstration

La démonstration de ces résultats est établie en utilisant les égalités:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vous avez la démonstration de ces égalités dans l'Annexe.

Exemple

L'exemple du lancer du dé: on peut calculer directement les moments de X:

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = 3.5 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} \simeq 2.92.$$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Variable Indicatrice

Soit A un événement quelconque; on appelle v.a. indicatrice de l'événement A, la v.a. définie par $X = \mathbb{1}_A$, c'est à dire:

$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \bar{A} \\ 1 & \text{si } \omega \in A \end{cases}$$

Ainsi $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec:

$$\begin{aligned} &P(X=1) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 1\} = P(A) = p \\ &P(X=0) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 0\} = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = q \\ &\text{avec } p + q = 1 \end{aligned}$$

Définition

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$, ce qu'on écrit symboliquement $X \sim \mathcal{B}(p)$. Une distribution de Bernoulli est associée à la notion "épreuve de Bernoulli", qui est une épreuve aléatoire à deux issues: succès ($X = 1$) et échec ($X = 0$).

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Fonction de répartition de loi de Bernoulli

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Espérance de loi de Bernoulli

$$E(X) = 1 \times P(A) + 0 \times P(\bar{A}) = P(A) = p$$

Variance de loi de Bernoulli

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

car

$$E(X^2) = 1^2 \times P(A) + 0^2 \times P(\bar{A}) = P(A) = p$$

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

- Décrite pour la première fois par *Isaac Newton* en 1676 et démontrée pour la première fois par le mathématicien suisse *Jacob Bernoulli* en 1713.
- La loi binomiale est l'une des distributions de probabilité les plus fréquemment rencontrées en statistique appliquée.
- On exécute n épreuves **indépendantes** de Bernoulli.
- Chaque épreuve a p pour probabilité de succès et $1 - p$ pour probabilité d'échec.

$$A \quad A \quad \bar{A} \quad A \quad \bar{A} \quad \dots \quad \bar{A} \quad A \quad A$$

$$S \quad S \quad E \quad S \quad E \quad \dots \quad E \quad S \quad S$$

- $X =$ **le nombre de succès** sur l'ensemble des n épreuves.
- X dépend de deux paramètres n et p.

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

$$S \quad S \quad E \quad S \quad E \quad \dots \quad E \quad S \quad S$$

- $X =$ **le nombre de succès** sur l'ensemble des n épreuves.
- $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

- $\binom{n}{k}$ est le nombre d'échantillons de taille n comportant exactement k succès, de probabilité p^k, indépendamment de l'ordre, et donc $n-k$ échecs, de probabilité $(1-p)^{n-k}$.
- On écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque

Une variable de Bernoulli n'est donc qu'une variable binomiale de paramètres $(1, p)$.

$$X \sim \mathcal{B}(p) \iff X \sim \mathcal{B}(1, p)$$

Triangle de Pascal & Binôme de Newton

Triangle de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \forall\, n \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

$n = 0$:					1				
$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	1		4		6		4		1

Binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Cette formule permet de vérifier que la loi Binomiale est une loi de probabilité:

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

Exemple

On jette cinq pièces équilibrées. Les résultats sont supposés indépendants. Donner la loi de probabilité de la variable X qui compte le nombre de piles obtenus.

Solution

- $X =$ nombre de piles (*succès*).
- $n = 5$.
- $p = 1/2$.
- $X \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$.
- $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, 5\}$
- $P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32}$
- $P(X = 1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{5}{32}$
- $P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{10}{32}$
- $P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{10}{32}$
- $P(X = 4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{5}{32}$
- $P(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{32}$

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Démonstration

Première approche: On associe à chaque épreuve i, $1 \leqslant i \leqslant n$, une v.a. de Bernoulli.

$$\mathbb{1}_A = X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \bar{A} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

On peut écrire alors: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
Donc

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

et

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p)$$

car les v.a. X_i sont indépendantes.

Deuxième approche: Calcul direct.

- $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \ldots = np$
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- Pour obtenir $E(X^2)$ par un procédé de calcul identique, on passe par l'intermédiaire du moment factoriel $E[X(X-1)]$.
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E[X(X-1)] + E(X) - E(X^2)$
- $E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = \ldots = n(n-1)p^2$
- $V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$

Exemple

Le nombre de résultats pile apparus au cours de n jets d'une pièce de monnaie suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

avec $E(X) = n/2$ et $V(X) = n/4$.

Exemple

Le nombre N de boules rouges apparues au cours de n tirages avec remise dans une urne contenant deux rouges, trois vertes et une noire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/3)$:

$$P(N = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{2^{n-k}}{3^n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

avec $E(X) = n/3$ et $V(X) = 2n/9$.

Remarque

Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, les v.a. X_1 et X_2 étant **indépendantes**, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Ceci résulte de la définition d'une loi binomiale puisqu'on totalise ici le résultat de $n_1 + n_2$ épreuves indépendantes.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Définition

Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si c'est une variable à valeurs entières, $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc avec une infinité de valeurs possibles, de probabilité:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Cette loi ne dépend qu'un seul paramètre réel positif λ, avec l'écriture symbolique $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

Espérance de loi de Poisson

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) \\ &= \dots \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Variance de loi de Poisson

- On calcule d'abord $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \dots = \lambda(\lambda + 1)$.

Ensuite

$$V(X) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

Exemple

- $X =$ nombre de micro-ordinateurs vendus chaque jour dans un magasin.
- On suppose $X \sim \mathcal{P}(5)$.
- La probabilité associée à la vente de 5 micro-ordinateurs est

$$P(X = 5) = e^{-5}\frac{5^5}{5!} = e^{-5} \simeq 0.1755$$

- La probabilité de vendre au moins 2 micro-ordinateurs est

$$P(X \geqslant 2) = 1 - \left(e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!}\right) \simeq 0.9596$$

- Le nombre moyen de micro-ordinateurs vendus chaque jour dans le magasin est égal à 5 puisque $E(X) = \lambda = 5$.

Propriétés

Si X et Y sont deux variables **indépendantes** suivant des lois de Poisson, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors leur somme suit aussi une loi de Poisson: $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Approximation d'une loi binomiale

$$\text{Si } n \to \infty \text{ et } p \to 0 \text{ alors } X : \mathcal{B}(n,p) \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Remarque

Une bonne approximation est obtenue si $n \geqslant 50$ et $np \leqslant 5$.

Dans ce contexte, la loi de Poisson est souvent utilisée pour modéliser le nombre de succès lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience ayant une chance très faible de réussir par une loi de Poisson.

Applications de la loi de Poisson

- Le nombre d'individus dépassant l'âge de 100 ans dans une communauté.
- Le nombre de faux numéros téléphoniques composés en un jour.
- Le nombre de clients pénétrant dans un bureau de poste donné en l'espace d'un jour.
- Le nombre de particules α émises par un matériau radioactif pendant un certain laps de temps.

La v.a. dans ces exemples est répartie de manière approximativement poissonienne car: on approxime par là une variable binomiale.

Loi Géométrique ou de Pascal $\mathcal{G}(p)$

- ε : "On répéte l'épreuve de Bernoulli jusqu'à avoir le premier succès".
- Exemple:

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{A} & \bar{A} & \bar{A} & \bar{A} & \bar{A} & \dots & \bar{A} & \bar{A} & A \\ E & E & E & E & E & \dots & E & E & S \end{array}$$

- Chaque épreuve a p pour probabilité de succès et $1-p$ pour probabilité d'échec.
- $X =$"le nombre d'épreuves effectuées".

$$\underbrace{E \quad E \quad E \quad E \quad E \quad \dots \quad E \quad E}_{k-1} \quad S$$

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. On dit $X \sim \mathcal{G}(p)$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$
- Attention: Parfois $X =$ "nombre d'épreuves effectuées avant obtenir le premier succès". Dans ce cas $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On dit $X \sim \mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$.
- Cette loi peut servir à modéliser des temps de vie, ou des temps d'attente, lorsque le temps est mesuré de manière discrète (nombre de jours par exemple).
- Série entière : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ pour $|x| < 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p\,\frac{1}{1-(1-p)} = 1$

Moments de loi Géométrique

Espérance de loi Géométrique

- $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$
- Série entière: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x) \quad$ pour $\quad |x| < 1$
- Dérivée première de la série entière: $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1/(1-x)^2$
- Donc $E(X) = \frac{p}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}$

En d'autres termes, si des épreuves indépendantes ayant une probabilité p d'obtenir un succès sont réalisés jusqu'à ce que le premier succès se produise, le nombre espéré d'essais nécessaires est égal à $1/p$. Par exemple, le nombre espéré de jets d'un dé équilibré qu'il faut pour obtenir la valeur 1 est 6.

Moments de loi Géométrique

Variance de loi Géométrique

- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E[X(X-1)] + E(X) - E^2(X)$. Or,

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1}$$
$$= p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

- Dérivée première de la série entière: $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1/(1-x)^2$
- Dérivée seconde de la série entière: $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = 2/(1-x)^3$
- Donc $E[X(X-1)] = \frac{2p(1-p)}{[1-(1-p)]^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$
- Et alors $V(X) = E[X(X-1)] + E(X) - E^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(r, p)$

Loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(r, p)$

- ε : "On répéte l'épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir un total de r succès".
- Exemple avec $r = 3$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{A} & A & \bar{A} & \bar{A} & \bar{A} & A & \bar{A} & \bar{A} & A \\ E & S & E & E & E & S & E & E & S \end{array}$$

- Mais on peut obtenir r succès d'autres façons:

$$\begin{array}{ccccccccc} S & E & E & E & E & E & S & E & S \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} E & E & E & E & S & E & S & E & S \end{array}$$

- Chaque épreuve a p pour probabilité de succès et $1 - p$ pour probabilité d'échec.
- Désignons $X =$"le nombre d'épreuves nécessaires pour attendre ce résultat".

$$\underbrace{\overbrace{E \quad S \quad E \quad E \quad E \quad S \quad E \quad E}^{r-1 \text{ succès et } k-r \text{ échecs}} \quad S}_{X=k}$$

- $X(\Omega) = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$. On dit $X \sim \mathcal{BN}(r, p)$.
- $\forall\, k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$\mathcal{G}(p) = \mathcal{BN}(1, p)$

- ε : "On répéte l'épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir un total de r succès".
- Soit,

$$E \quad \ldots \quad E \quad S \quad E \quad \ldots \quad E \quad S \ldots \quad E \ldots \quad E \quad S$$

- Soit, Y_1 le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'au premier succès, Y_2 le nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir un deuxième succès, Y_3 celui menant au 3ème et ainsi de suite.
- Càd,

$$\underbrace{E \quad \ldots \quad E \quad S}_{Y_1} \quad \underbrace{E \quad \ldots \quad E \quad S}_{Y_2} \quad \underbrace{\ldots}_{\ldots} \quad \underbrace{E \quad \ldots \quad E \quad S}_{Y_r}$$

- Les tirages étants indépendantes et ayant toujours la même probabilité de succès, chacune des variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ est géométrique $\mathcal{G}(p)$.
- $X =$"le nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention de r succès"$= Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_r$.
- Donc,

$$E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

et

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} V(Y_i) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

car les Y_i sont indépendantes.