Probabilités

Variables aléatoires Continues

Mohamad GHASSANY

EFREI PARIS

Plan

Rappel: Variables Aléatoires Discrètes

Variable aléatoire discrète

- X est une variable aléatoire ***discrète*** si l'ensemble des valeurs que prend X, $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.
  - La *loi de probabilité* définie sur $X(\Omega)$ par $p_i = p(x_i) = P(X = x_i)$
  - $p(x_i) \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$, et $P(a < X \leqslant b) = \sum_{i/a<x_i\leqslant b} p(x_i)$.

Fonction de répartition d'un v.a.d

- La fonction de répartition de X, qu'on note $F(a)$, définie pour tout réel a, $-\infty < a < \infty$, par $F(a) = P(X \leqslant a) = \sum_{i/x_i \leqslant a} P(X = x_i)$.
  - C'est une fonction en escalier (constante par morceaux).
  - $F(a) \leqslant 1$ car c'est une probabilité.
  - $F(a)$ est continue à droite.
  - $\lim\limits_{a\to-\infty} F(a) = 0$ et $\lim\limits_{a\to\infty} F(a) = 1$
  - $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$ pour tout $a < b$

Moments d'une v.a.d

- $E(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p(x_i)$
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Variables Aléatoires Continues

Variables Alétoires Continues - Densité et Probabilités

- Précédemment nous avons traité des variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire de variables dont l'univers est fini ou infini dénombrable.
- Il existe cependant des variables dont l'univers est infini non dénombrable.
- Exemples:
  - L'heure d'arrivée d'un train à une gare donnée.
  - La durée de vie d'un transistor.

Definition

*X est une variable aléatoire continue[1] **à densité** s'il existe une fonction f non négative définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et vérifiant pour tout ensemble B de nombres réels la propriété*

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.

- Tous les problèmes de probabilité relatifs à X peuvent être traités grâce à f.
- Par exemple pour $B = [a, b]$, on obtient:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$$

[1] Pas toutes les variables alétoires continues ont une densité.

Graphiquement, $P(a \leqslant X \leqslant b)$ est l'aire de la surface entre l'axe de x, la courbe correspondante à $f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$.

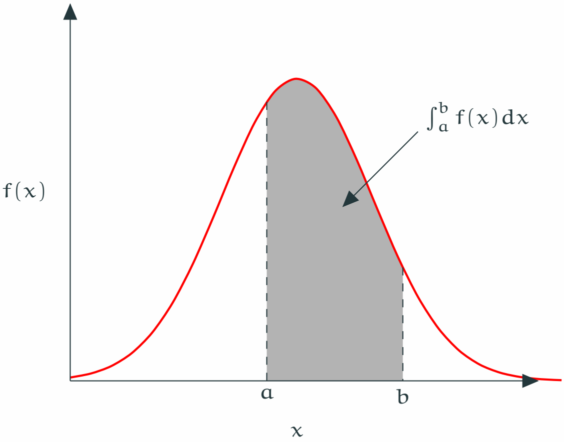


Figure 1: $P(a \leqslant X \leqslant b) =$ *surface grisée*

Variables Alétoires Continues - Interprétation Graphique - Exemple

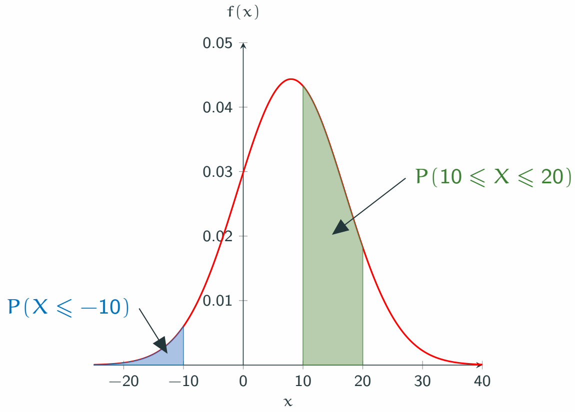
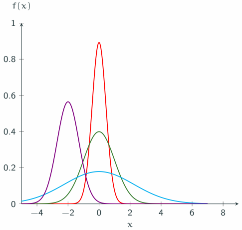
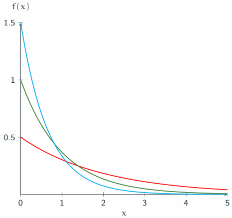
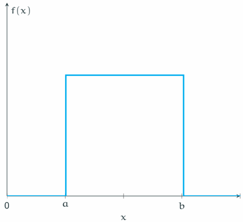


Figure 2: L'aire hachurée correspond à des probabilités. $f(x)$ *étant une fonction densité de probabilité.*

Propriétés de la fonction densité







Proprieties

Pour toute variable aléatoire continue X de densité f:

- $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- Comme $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$, si l'on pose $a = b$ il résulte $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$
- Ceci siginifie que la probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur isolée fixe est toujours nulle.

Exemple

Soit X la variable aléatoire réelle de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer k.
2. Calculer: $P(1 \leqslant X \leqslant 3), P(2 \leqslant X \leqslant 4)$ et $P(X < 3)$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire réelle continue ayant pour densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer k.
2. Calculer $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$

Fonction de répartition d'une v.a.c

Definition

Si comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit la fonction de répartition de X *par:*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_X(a) = P(X \leqslant a) \end{aligned}$$

alors la relation entre la fonction de répartition F_X *et la fonction densité de probabilité* $f(x)$ *est la suivante:*

$$\forall \quad a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Proprieties

Pour une variable aléatoire continue X:

- $F'_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = f(x)$.
- Pour tous réels $a \leqslant b$,

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) \\ &= P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

La fonction de répartition correspond aux probabilités cumulées associées à la variable aléatoire continue sur l'intervalle d'étude.

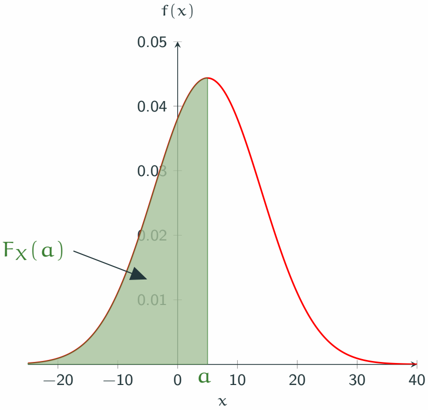


Figure 3: L'aire hachurée en vert sous la courbe de la fonction densité de probabilité correspond à la probabilité $P(X < a) = F_X(a)$ *et vaut* $0,5$ *car ceci correspond exactement à la moitié de l'aire totale sous la courbe.*

Proprieties

Les propriétés associées à la fonction de répartition sont les suivantes:

1. F_X est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point où f est continue.
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. F_X est à valeurs dans $[0, 1]$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Exemple

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de densités de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y + k & \text{si} \quad 0 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $F_X(a)$ et $F_Y(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Fonction d’une variable aléatoire continue

- Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X et de fonction de répartition F_X.
- Soit h une fonction continue définie sur $X(\Omega)$, alors $Y = h(X)$ est une variable aléatoire.
- Pour déterminer la densité de Y, notée f_Y, on commence par calculer la fonction de répartition de Y, notée F_Y, ensuite nous dérivons pour déterminer f_Y.

Calcul de densités

Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Calculer la densité des variables aléatoires suivantes:

- $Y = aX + b$
- $Z = X^2$
- $T = e^X$

Example

Soit la v.a.c X ayant la fonction de densité

$$f_X(x) = 2x \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

Déterminer la densité de: $Y = 3X + 1$, $Z = X^2$ et $T = e^X$.

Moments des variables aléatoires continues

Espérance d'une v.a.c

Definition

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, on appelle espérance de X, le réel $E(X)$, défini par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

si cette intégrale est convergente.

Les propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire continue sont les mêmes que pour une variable aléatoire discrète.

Proprieties

Soit X une variable aléatoire continue,

- $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a \geqslant 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Théorème de transfert

Theorem

Si X *est une variable aléatoire de densité* $f(x)$, *alors pour toute fonction réelle* g *on aura*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

Example

Soit la v.a.c X ayant la fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer l'espérance des variables aléatoires $Y = 3X + 1$, $Z = X^2$ et $T = e^X$.

La variance d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. C'est un paramètre de dispersion qui correspond au moment centré d'ordre 2 de la variable aléatoire X.

Definition

Si X est une variable aléatoire ayant une espérance $E(X)$, on appelle variance de X le réel

$$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Si X est une variable aléatoire continue, on calcule $E(X^2)$ en utilisant le théorème de transfert,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

Example

Calculer la variance de la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Proprieties

Si X est une variable aléatoire admettant une variance alors:

- $V(X) \geqslant 0$, si elle existe.
- $\forall\ a \in \mathbb{R}, V(aX) = a^2 V(X)$
- $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Definition

Si X est une variable aléatoire ayant une variance $V(X)$, on appelle écart-type de X, le réel:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$