ESILV
ENGINEERING SCHOOL
DE VINCI PARIS

2020/2021

Statistique inférentielle

Contrôle continu

Calculatrice non autorisée

28 novembre 2020 – durée 45min

Rappel: Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

Exercice 1 *(7 points)*

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, dont chacune suite la loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Rappeler le théorème centrale limite (TCL) et déduire la loi de $\overline{X}_n$ si n est grand.
2. Donner, à l'aide du TCL, la loi de S_n si n est grand.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 *(7 points)*

1. Déterminer l'estimateur du paramètre λ de la loi de Poisson à partir d'un échantillon aléatoire de taille n avec,
   (a) la méthode des moments.
   (b) la méthode du maximum de vraisemblance.
2. Soit une variable aléatoire X de fonction de densité $f(x) = (\theta+1)x^\theta \times \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$. Déterminer l'estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes d'espérance μ et de variance σ^2. Soit les estimateurs de μ suivants:

$$\theta_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \frac{X_1 + 3X_2}{4}$$

1. Est ce que ces deux estimateurs de μ sont biaisés?
2. Entre θ_1 et θ_2 que choisir pour estimer μ?