CC2 Stat Inf barème

mardi 29 décembre 2020 16:41

CC2 Stat Inf 9/1/2022

Ex 1

Exercice 1 (7 points)

Une usine fabrique des câbles. On suppose que la charge maximale supportée par un câble exprimée en tonnes est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres m et $\sigma = 0.5$. Une étude portant sur 50 câbles a donné une moyenne des charges maximales supportées égale à 12.2 tonnes.

5 1. Déterminer l'intervalle de confiance à 99% de la charge maximale moyenne de tous les câbles fabriqués par l'usine.

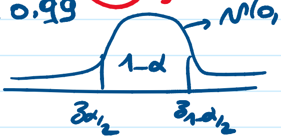
2 2. Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon étudié pour que la longueur de l'intervalle de confiance à 99% soit inférieure ou égale à 0.2?

1) 5
- * Paramètre à estimer : m 1/2
- * Estimateur : $\overline{X}_n$ 1/2
- * Loi de l'estimateur : $\overline{X}_n \to \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$ où $\sigma = 0.5$ ou 1

$$\text{Donc} \quad Z = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

- * l'$IC_{0.99}(m)$ t.q $P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha = 0.99$ 1/2 ou

avec $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$



- * Donc $m \in [\overline{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ 1

avec $z_{\alpha/2} = 2,5758$ 1/2 car $\alpha = 0.01$

$\sigma = 0.5$ et $n = 50$ et $\overline{x}_n = 12.2$ tonnes

$$\Rightarrow m \in \left[12.2 \pm 2.5758 \times \frac{0.5}{\sqrt{50}}\right] = [12.018 ; 12.382]$$ 1

2) 2

La longueur de l'$IC_{0.99}(m)$ est $2 \times 2.5758 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ avec $\sigma = 0.5$

$$= \frac{2.5758}{\sqrt{n}}$$ 1

On veut $\frac{2.5758}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \Rightarrow n \geq \left(\frac{2.5758}{0.2}\right)^2 \simeq 165.869$ 1/2

il faudra que $n \geq 166$. 1/2

Exercice 2 (7 points)

Lors d'un sondage, 814 adultes ont répondu à une séries de questions sur leur opinion quant à l'état des affaires dans l'entreprise. Au total, 562 adultes ont répondu oui à la question: "Pensez vous que les affaires ne marchent pas bien en ce moment?"

On souhaite estimer le paramètre p qui représente la proportion de la population d'adultes qui pensent que les affaires ne vont pas bien dans l'entreprise.

2 1. Définir la variable aléatoire parente et sa loi.

2 2. Proposer un estimateur de p. Quelle est sa loi? Donner une estimation ponctuelle de p.

3 3. Construire un intervalle de confiance à 90% pour la proportion de la population des adultes qui pensent que les choses ne vont pas bien dans l'entreprise.

Ex 2

1) 2

Soit $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'adulte répond oui} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 1

$X \to \mathcal{B}(p)$ où $p = P(X = 1)$ 1

2

2) * Estimateur de p : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$ 1/2

* Loi : $\overline{X}_n \to \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ Selon T.C.L 1

• estimation : $\hat{p} = \overline{x}_n = 562/814 = 0{,}69$ 1/2

3

3) $Z = \dfrac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to \mathcal{N}(0,1)$ 1

On construit un $IC_{0.9}(p)$ t.q $P(z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha = 0.90$ 1/2

Donc $p \in \left[\overline{X}_n \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$ 1/2

où $n = 814$, $\overline{x}_n = \hat{p} = 0.69$; $z_{1-\alpha/2} = 1{,}6449$ ($\alpha = 0.1$) 1/2

alors $p \in \left[0.69 \pm 1{,}6449 \times \sqrt{\frac{0.69(1-0.69)}{814}}\right]$

$p \in [0.663 \,;\, 0.717]$ 1/2

Exercice 3 (6 points)

Une étude a été réalisée pour estimer le nombre de kilomètres effectués par jour, en voiture, par les résidents d'une ville de province. Les données suivantes ont été recueillies à partir d'un échantillon de 15 habitants:

20	20	28	16	11	17	23	16	22	18	10	22	19	29	32

On donne: $\sum_{i=1}^{15} X_i = 303$ et $\sum_{i=1}^{15}(X_i - \overline{X})^2 = 532.4$

4.5

1. Construire un intervalle de confiance à 95% pour estimer le nombre moyen de kilomètres effectués par les habitants de cette ville, en voiture.

1.5

2. Supposant que l'on souhaite estimer le nombre moyen de kilomètres effectués par la population avec une marge d'erreur de plus ou moins 2 kilomètres, au seuil de confiance de 90%. Est-ce que les données fournissent le niveau de précision souhaité ? Si non que recommandez vous de faire ?

Ex3 Soit m le nb moyen de Km effectués

4,5

• Paramètre à estimer : m 1/2

• estimateur : $\overline{X}_n$ 1/2

• Loi : $\overline{X}_n \to \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$

Or σ est inconnu, soit S^* son estimateur

avec $S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \overline{x})^2$

alors $T = \dfrac{\overline{X}_n - m}{S^*/\sqrt{n}} \to St(n-1)$ 1/2

• On cherche $IC_{0.95}(m)$ t.q

$P(t_{n-1,\alpha/2} < T < t_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}95$ 1/2

alors $m \in \left[\overline{X}_n \pm t_{n-1,\alpha/2}\, S^*/\sqrt{n}\right]$ 1/2 avec * $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum X_i = \frac{1}{15} \times 303 = 20,2$ km 1/2

* $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = 2,14$ 1/2

• $S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{14} \times 532,4 \simeq 38.029$

• $S^* = \sqrt{38.029} = 6.167$ 1/2

• $n = 15$

$\Rightarrow \quad m \in \left[20.2 \pm 2.14 \times \frac{6.167}{\sqrt{15}} \right]$

$m \in [16,792 \,;\, 23,607]$ 1/2

1,5

2) marge d'erreur au seuil 90% est

$1.76 \times \frac{6.167}{\sqrt{15}} \simeq 2,802 > 2$ 1/2

Donc les données ne sont pas suffisantes. 1/2

Il faut augmenter la taille d'échantillon n. 1/2