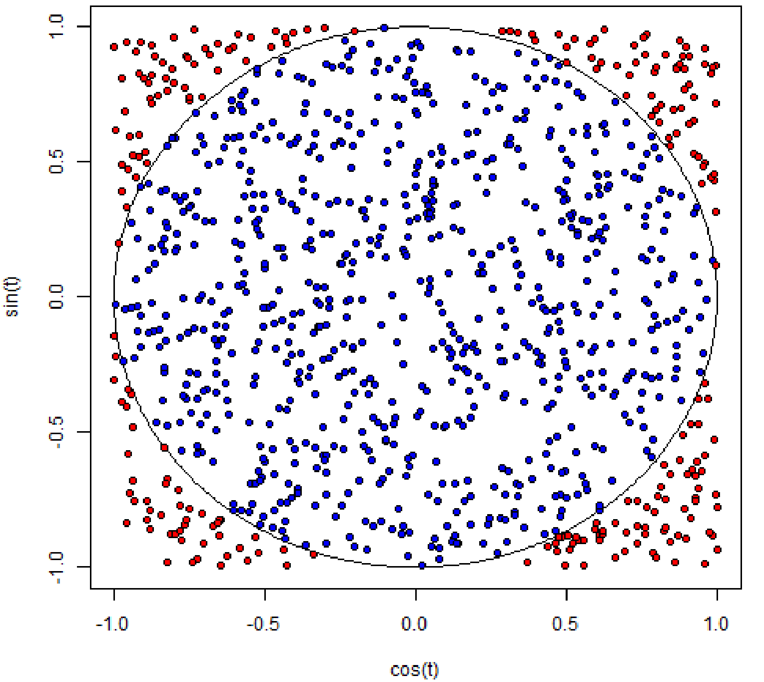
# Probabilités Numériques

# Principe de la méthode par rejet

```
N=1000
X=runif(N,-1,1)
Y=runif(N,-1,1)
Est=4*mean(X^2+Y^2<1)
Est
```

```
## [1] 3.124
```



# Partie 3

**Estimer le volume du sphère en dimension 5**

- Le volume du 5-cube est $2^5 = 32$
- Nos échantillons sont des points dans le 5-cube.
- Pour chaque point, on regarde si le point est dans la 5-sphère unité (donc $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + m^2 < 1$)

```
N=100000
T=runif(5*N,-1,1)
A=matrix(T,N,5)
D=apply(A^2,1,sum)
Est=2^5*mean(D<1)
Est
```

```
## [1] 5.26592
```

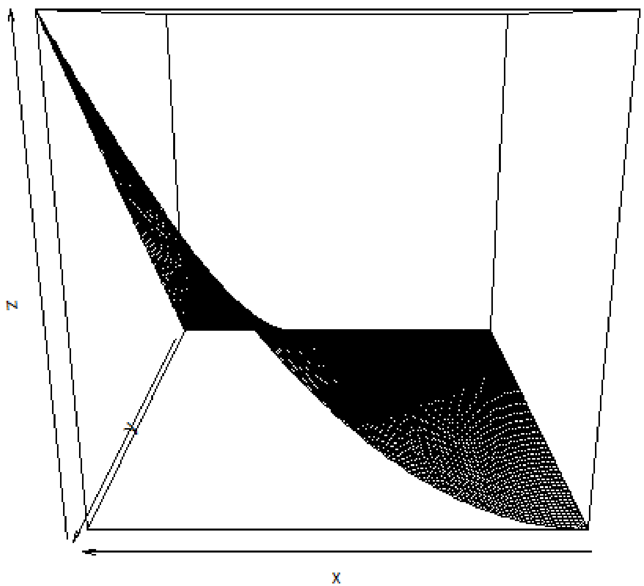
```
(8/15)*pi^2
```

```
## [1] 5.263789
```

**Estimer le volume du sphère en dimension 5**

- Pour chaque point, on définie la variable aléatoire $X_i \sim \mathcal{B}(\pi^2/60)$.
- On va estimer le volume de la sphère avec $P_n = 32\overline{X}_n = \frac{32}{n} \sum X_i$
- $E(\overline{X}_n) = \pi^2/60$ et $V(\overline{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{\pi^2(60-\pi^2)}{60n}$
- D'après le TCL, $\overline{X}_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$
- $E(P_n) = 32 \times \pi^2/60$ et $V(P_n) = 32^2 \frac{\pi^2(60-\pi^2)}{60n}$
- Selon TCL, $P_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(32 \times \pi^2/60, 32^2 \frac{\pi^2(60-\pi^2)}{60n})$
- Donc $IC_{0.95}(P_n) = [P_n \pm 1.96 \frac{32\pi\sqrt{(60-\pi^2)}}{\sqrt{60n}}]$
- Selon l'IC, la vitesse de convergence est $1/\sqrt{n}$. Donc l'avantage de cette méthode est qu'elle est indépendante de la dimension.

# Partie 4




```
N=10000
X=runif(N,0,2)
Y=runif(N,0,2)
Z=runif(N,0,8)

mean(Z < X^2*Y)*32
```

```
## [1] 5.2896
```

# TD2

La fameuse méthode de Monte Carlo

- $E(X) = \int_R x f(x) dx$ où $f$ est la densité de $X$.
- Théorème du transfert: Si $X$ est une variable aléatoire de densité $f$, alors pour toute fonction réelle $g$ on aura $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$.
- Exemple: $E(X^2) = \int x^2 f(x) dx$ ou $E(e^X) = \int_R e^x f(x) dx$
- Loi de grands nombres: Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $E(|X_i|) < \infty$ et que tous les $X_i$ admettent la même espérance $E(X_i) = m$. Alors: $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to m \quad \text{presque sûrement}$

Alors,

- Méthode de MC: $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) dx$ où $f$ est une densité.
- Ensuite $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) dx = E(\phi(X))$ selon loi de transfert.
- Ensuite $E(\phi(X)) = \frac{1}{n} \sum \phi(X_i)$ selon loi de grands nombres.

**Exemple:**

On va appliquer sur l'exemple suivant: Soit $I = \int_0^1 e^x dx = E[e^U] = E[f(U)] \quad$ où $U \sim U(0,1)$

Remarque: la valeur théorique de $I$ est $e - 1 \approx 1.72$.

Estimation par MC: $I = E[e^U] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{u_i} \quad$ où les $u_i \sim U(0,1)$

```
N=10000
U=runif(N,0,1)
#Monte Carlo simple
MC=exp(U)
EMC=mean(MC)
cat("valeur approchée de I par MC simple = ",EMC)
```

```
## valeur approchée de I par MC simple =  1.722529
```

# Partie 1

Soit $I = \int_0^1 e^{-3x} dx$. Soit $f(x) = e^{-3x}$. Soit $X_i$ suite de v.a. iid t.q. $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$.

**1**. $I = \frac{1}{3}(1 - e^{-3})$ = 0.3167376

**2**. $E(f(X))$ où $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ Donc $E(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \times 1_{[0,1]}(u) du = \int_0^1 e^{-3x} dx = I$

**3**. Un estimateur de $I$ selon la méthode de MC est donc $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-3X_i}$ où les $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$.

**4**. **5**.

```
N=10000; X = runif(N,0,1)
I = mean(exp(-3*X))
I
```

```
## [1] 0.318791
```

6. On cherche une estimation de $V(f(X))$

```
# Estimation de la variance de l'estimateur
variance_estime = var(exp(-3*X))
variance_estime
```

```
## [1] 0.06666105
```

7. Variance théorique:

$$V(f(X)) = E[f^2(X)] - E^2[f(X)]$$

or $E[f^2(X)] = \int_R f^2(u) \times 1_{[0,1]}(u)du = \int_0^1 e^{-6x}dx = \frac{1}{6}(1 - e^{-6})$ Donc $V(f(X)) = \frac{1}{6}(1 - e^{-6}) - (\frac{1}{3}(1 - e^{-3}))^2 = \frac{1}{18}(1 - 5e^{-6} + 4e^{-3})$ Théoriquement, $V(X)$= 0.0659308

**8**. L'intervalle de confiance à 99% est $IC_{0.99} = [I \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ où $\sigma^2$ est la variance théorique $\frac{1}{18}(1 - 5e^{-6} + 4e^{-3})$.

La précision est $z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

On cherche $n$ t.q $2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 10^{-4}$ Donc il faut $n > 43744408$

Application numérique

```
Vtheorique = 1/18*(1-5*exp(-6)+4*exp(-3))
z=qnorm(0.995)
n=(sqrt(Vtheorique)*z*10^4)^2
n
```

```
## [1] 43744408
```

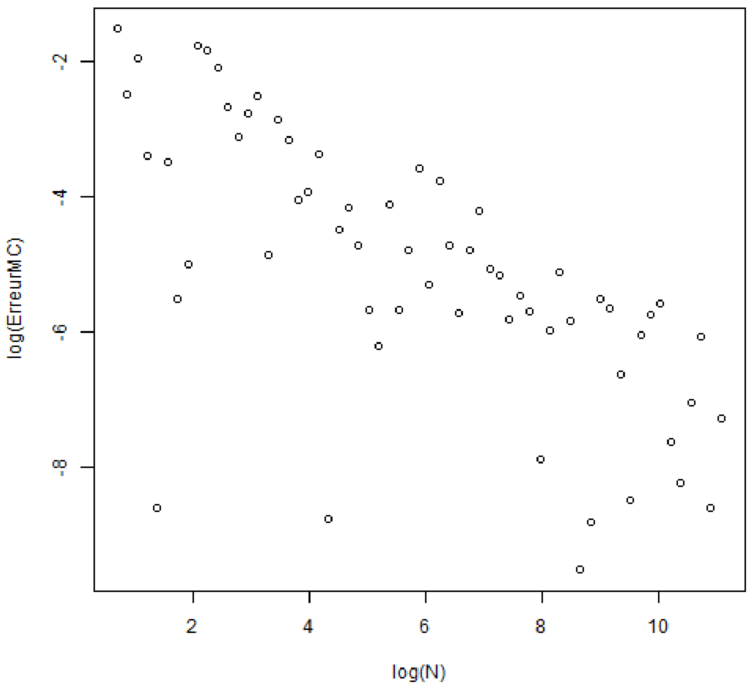
```
# X=runif(n,0,1)
# Est=mean(exp(-3*X))
# Est
```

La valeur théorique est 0.3167376

**9.**

```r
N=2^seq(1,16,0.25)

IappMC=rep(0,length(N))
k=1

for (i in N){
  a=0
  b=1
  X=runif(i)
  IappMC[k]=mean(exp(-3*X))
  k=k+1
}

ErreurMC=abs(IappMC-I)
```

```r
N= 10000
U = runif(N)
EstMC = cumsum(exp(-3*U))/(1:N)
```




```r
ErrMC.lm=lm(log(ErreurMC)~log(N))
print(ErrMC.lm$coefficients)
```

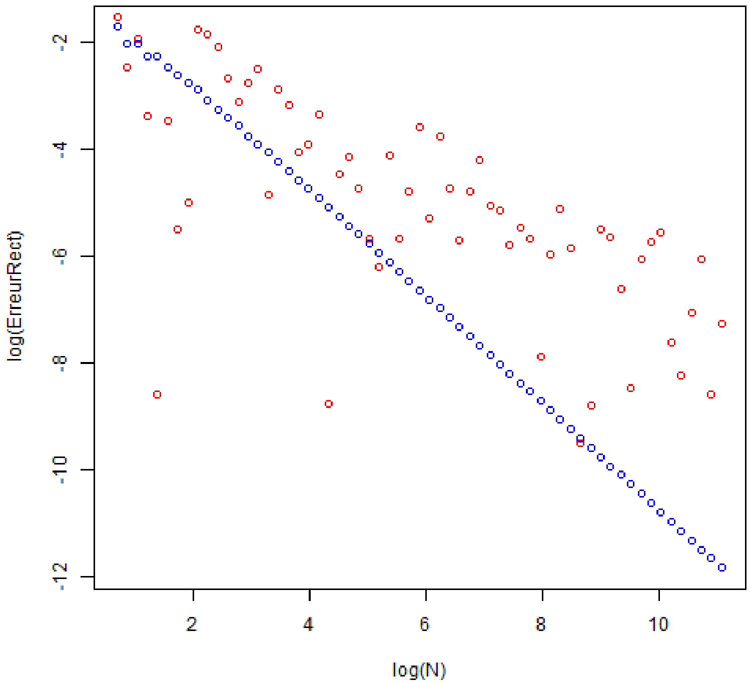
```
## (Intercept)      log(N)
##  -2.1549673  -0.4550665
```

Empiriquement la convergence semble bien être en $\frac{1}{\sqrt{n}}$

**10**.

```
f=function(x) exp(-3*x)
I=1/3*(1-exp(-3))

N=2^seq(1,16,0.25)

IappRect=rep(0,length(N))
k=1

for (i in N){
  a=0
  b=1
  X=seq(a,b,length.out = i+1 )
  X=X[2:length(X)]
  IappRect[k]=mean(f(X))
  k=k+1
}

ErreurRect=abs(IappRect-I)
```

```
plot(log(N),log(ErreurRect),col="blue")
points(log(N),log(ErreurMC),col="red")
```




```
ErrRect.lm=lm(log(ErreurRect)~log(N))
print(ErrRect.lm$coefficients)
```

```
## (Intercept)      log(N)
##  -0.8925178  -0.9817115
```

**Partie 2**

$$J = \int_0^1 xsin(1/x)dx$$

2. $J = \int_R xsin(1/x) \times 1_{[0,1]}(x)dx = E(Usin(1/U))$ où $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ Selon MC simple on estime $J$ avec $1/n \sum_i u_i sin(1/u_i)$

```
N=10000; U=runif(N) ; print(mean(U*sin(1/U)))
```

```
## [1] 0.3819955
```

```
integrate(function(x) x*sin(1/x), 0,1)
```

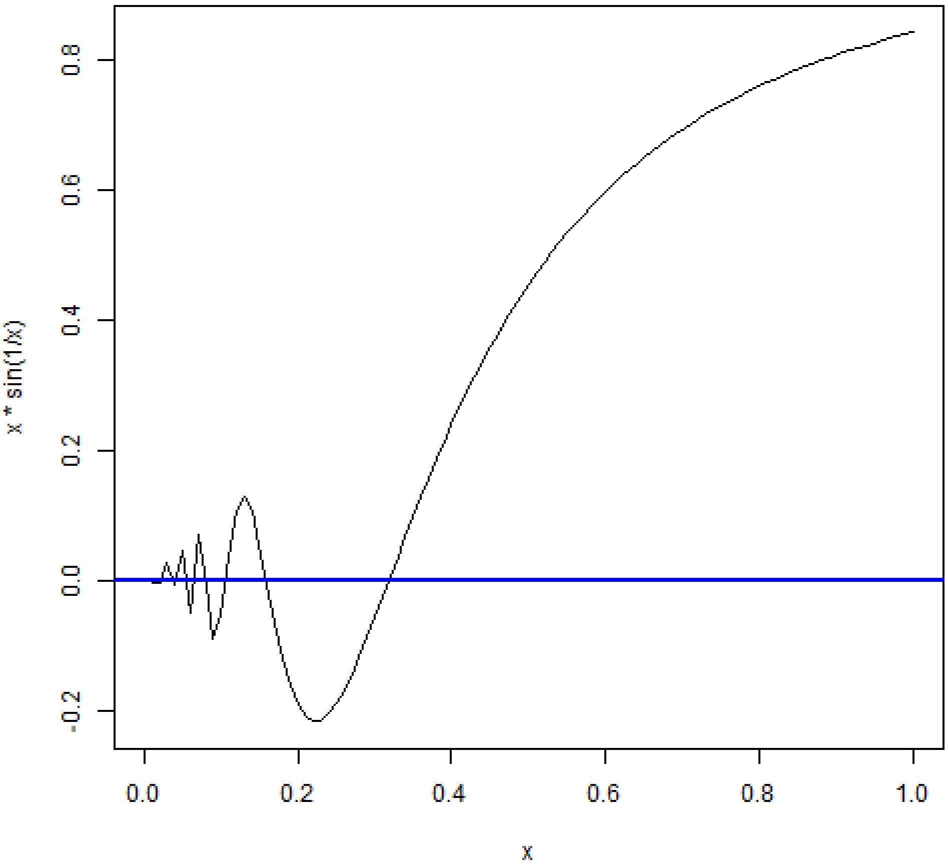
```
## 0.3785262 with absolute error < 7.7e-05
```

```
integrate(function(x) exp(-3*x), 0,1)
```

```
## 0.3167376 with absolute error < 3.5e-15
```

```r
curve(x*sin(1/x),0,1) ; abline(h=0, col="blue", lwd=2)
```

```
## Warning in sin(1/x): production de NaN
```



# TD3

## Réduction de variance avec Variable antithétique

**Partie 1**

Soit $I = \int_0^1 e^x dx$

1. $I = e - 1 = 1.718282$

2. $I = \int_0^1 e^x dx = \int_R e^x \times 1_{[0,1]}(x) dx = E(e^U)$ où $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

Donc $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{u_i}$ est un estimateur de $I$.

Variance: $V(e^U) = \int_0^1 (e^x)^2 dx - (\int_0^1 e^x dx)^2 = -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} = 0.2420356$

$V(T_n) = \frac{-e^2+4e-3}{2n}$

**3**.

```r
I=exp(1)-1

#Question 3
N=10000
X=runif(N)
EstMC=mean(exp(X))
EstMC
```

```
## [1] 1.71781
```

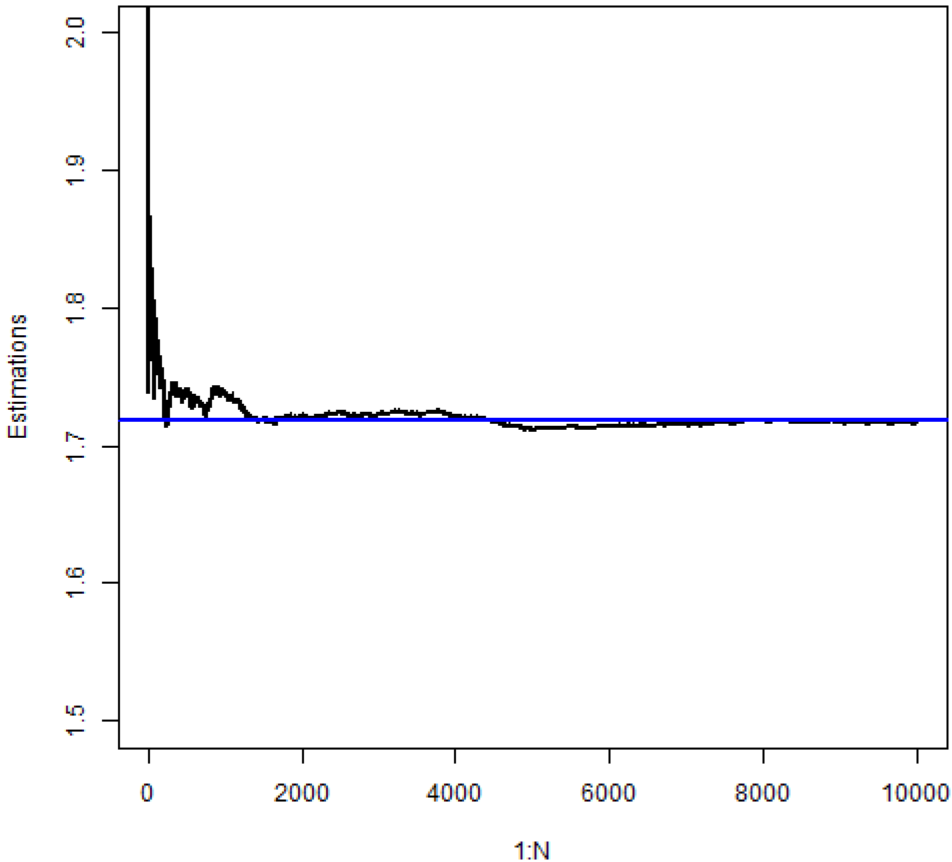
```r
print(EstMC-I)
```

```
## [1] -0.00047201
```

```r
print(var(exp(X)))
```

```
## [1] 0.2412118
```

```
plot(1:N, cumsum(exp(X))/(1:N),type="l", ylim=c(1.5,2), col="black", lwd=2, ylab = "Estimations")
abline(h=exp(1)-1, col="blue", lwd=2)
```



**4**. Loi de $Y = 1 - X$ où $X \sim \mathcal{U}(0,1)$

Soit $(a,b) \in [0,1]^2 \quad t.q. \quad a < b.$

$P(a < Y < b) = P(a < 1 - X < b) = P(1 - b < X < 1 - a)$ or $1 - b < 1 - a$ et sont dans $[0,1]$ Donc
$P(1 - b < X < 1 - a) = F_X(1 - a) - F_X(1 - b)$

Or $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ donc $f_X(x) = 1_{[0,1]}(x)$ et $F_X(x) = x$ si $x \in [0,1]$

Alors $P(1 - b < X < 1 - a) = F_X(1 - a) - F_X(1 - b) = (1 - a) - (1 - b) = b - a = P(a < X < b)$

On a démontré que $\forall (a,b) \in [0,1]^2 \quad t.q. \quad a < b$

$P(a < Y < b) = P(a < X < b)$

Donc si $X \sim \mathcal{U}(0,1), 1 - X \sim \mathcal{U}(0,1)$

5. $cov(f(X), f(1-X)) = E(f(X)f(1-X)) - E(f(X))E(f(1-X))$

Or $E(f(X)f(1-X)) = E(e^x e^{1-x}) = E(e) = e$ et $E(f(X)) = E(f(1-X)) = \ldots = e - 1$

Donc $cov(f(X), f(1-X)) = e - (e-1)^2 \approx -0.23$

Donc $f(X)$ et $f(1-X)$ sont corrélées négativement, où $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ et $f(x) = e^x$

6. $V(\frac{1}{2}(f(X)+f(1-X))) = \frac{1}{4}\Big(V(f(X))+V(f(1-X))+2cov(f(X)f(1-X))\Big) =$
$\frac{1}{4}(2(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{3}{2})-e^2+3e-1) = \ldots \approx 0.0039 << V(f(X)) \approx 0.24$

7. Un estimateur de MC amélioré en utilisant la variable anithétique $Y = 1-X$ est donc

$T_n = E\big[\frac{1}{2}\big(f(X)+f(1-X)\big)\big] = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\big(e^{x_i}+e^{1-x_i}\big)$

```r
N=10000
X=runif(N)
EstMC=mean(exp(X))
EstMC
```

```
## [1] 1.724583
```

```r
var(exp(X))
```

```
## [1] 0.2456901
```

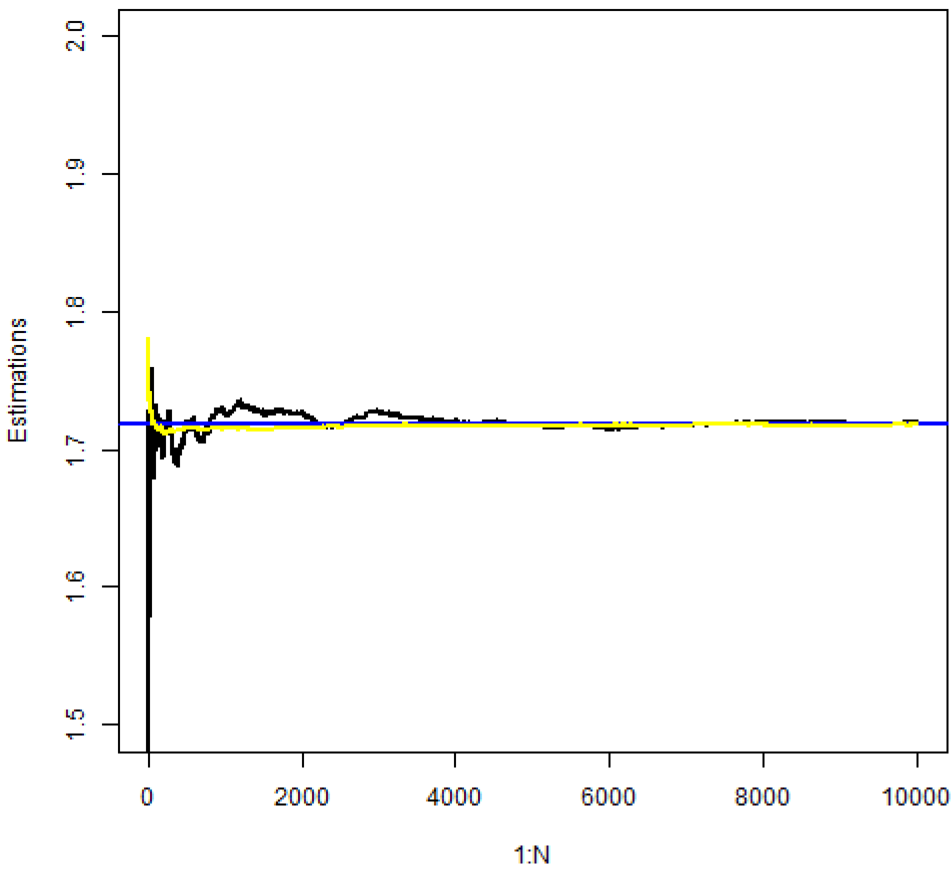
```r
EstMCVA = 0.5*mean(exp(X) + exp(1-X))
EstMCVA
```

```
## [1] 1.719184
```

```r
var(0.5*(exp(X) + exp(1-X)))
```

```
## [1] 0.003968487
```

```
plot(1:N, cumsum(exp(X))/(1:N),type="l", ylim=c(1.5,2), col="black", lwd=2, ylab = "Estimations")
abline(h=exp(1)-1, col="blue", lwd=2)
lines(1:N, cumsum(0.5*(exp(U)+exp(1-U)))/(1:N), col="yellow", lwd=2)
```



**8**. D'une part, pour MC simple:

$$IC_{99.9\%} = [I \pm z_{0.9995} \frac{\sqrt{V(f(X))}}{\sqrt{n}}]$$

On cherche $n$ t.q $z_{0.9995} \frac{\sqrt{V(f(X))}}{\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$ Donc $n \geq (z_{0.9995} \times \sqrt{V(f(X))} \times 10^{4})^{2}$ càd $n \geq 262065656$ pour MC simple.

D'autre part, pour MC amélioré par une Variable antithétique:

$$IC_{99.9\%} = [I \pm z_{0.9995} \frac{\sqrt{V(1/2(f(X)+f(1-X))}}{\sqrt{n}}]$$

On cherche $n$ t.q $z_{0.9995} \frac{\sqrt{V(1/2(f(X)+f(1-X))}}{\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$ Donc $n \geq (z_{0.9995} \times \sqrt{V(1/2(f(X)+f(1-X))} \times 10^{4})^{2}$ càd $n \geq 16575$

**Partie 2: Réduction de Variance avec Variable de contrôle**

L'idée ici est similaire à la partie précédente, on va se servir d'un unique tirage suivant une certaine loi, pour générer deux variables aléatoires, une que l'on cherche à estimer, et une dont on connait l'espérance et corrélée positivement avec celle que l'on cherche à estimer. En fait on va chercher une variable « proche » de celle que l'on cherche à estimer.

L'idée est d'écrire

$$E[f(X)] = E[f(X) - h(X)] + E[h(X)]$$

où

- $E[h(X)]$ explicite
- $V[f(X) - h(X)] << V[f(X)]$
- intuituivement $f(X)$ et $h(X)$ proches.

Donc pour I, on va considérer $f(U) = e^U$. On va choisir $h(U) = 1 + U$ comme $e^x \approx 1 + x$ près de 0 (dl d'ordre 1).

**1**. $g(x) = e^x$. $P$ est la partie régulière du développement limité d'ordre 1 de $g$ donc $P = 1 + x$.

**2**. $b = E(P(X)) = E(1 + X) = \int_0^1 (1 + x)dx$ car $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Alors $b = E(P(X)) = [x + \frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{3}{2} = b$

**3**. $cov(g(X), X) = E(Xg(X)) - E(X)E(g(X))$ Or $E(Xg(X)) = \int_0^1 xe^x dx = 1$

Donc $cov(g(X), X) = 1 - \frac{1}{2}(e - 1) = \frac{3-e}{2} > 0$

On en déduit que $cov(g(X), P(X)) = cov(g(X), 1 + X) = \frac{3-e}{2}$

**4**. Soit $T_i = g(X_i) - P(X_i) + b$.

$E(T_i) = E(g(X_i) - P(X_i) + b) = E(g(X_i)) - E(P(X_i)) + b$

Et $b = E(P(X_i))$ donc $E(T_i) = E(g(X_i)) = I$

$V(T_i) = V(g(X_i) - P(X_i) + b) = V(g(X_i) - P(X_i)) = V(g(X_i)) + V(P(X_i)) - 2cov(g(X_i), P(X_i))$

$= -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} + V(1 + X_i) - 2 \times \frac{3-e}{2}$

$= -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} + V(X_i) - 2 \times \frac{3-e}{2}$

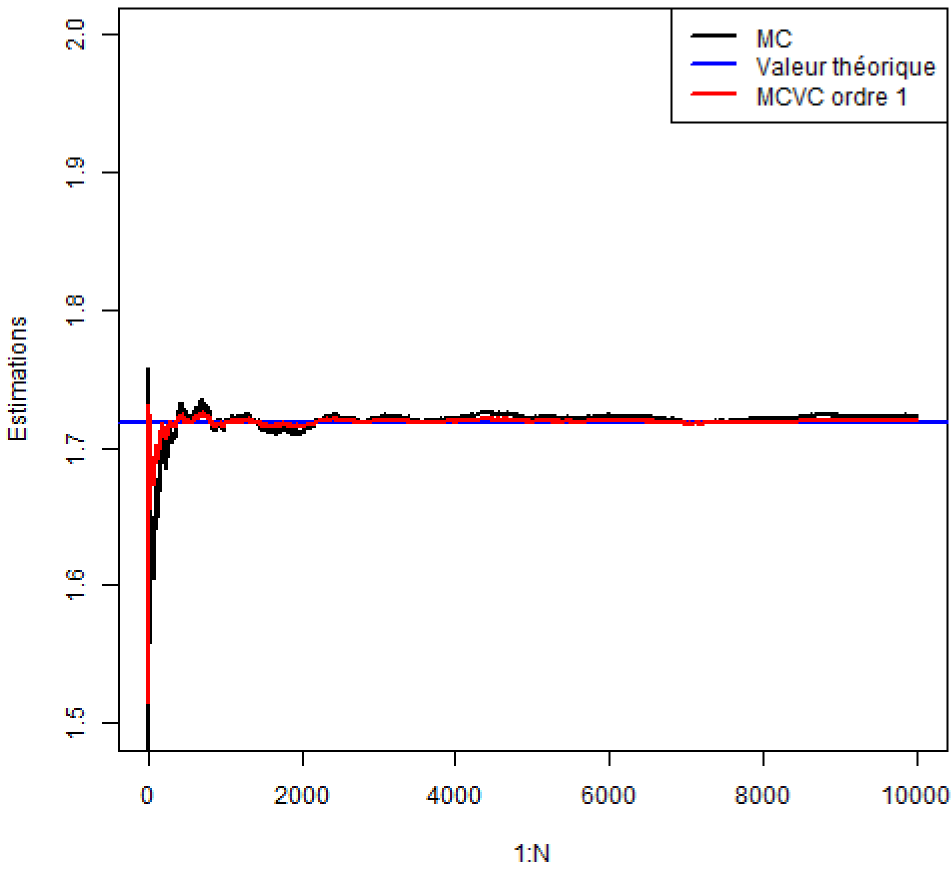
**Rq** $V(X+a) = V(X)$ et si $X$ suit la loi uniforme sur [0,1], $V(X) = 1/12$.

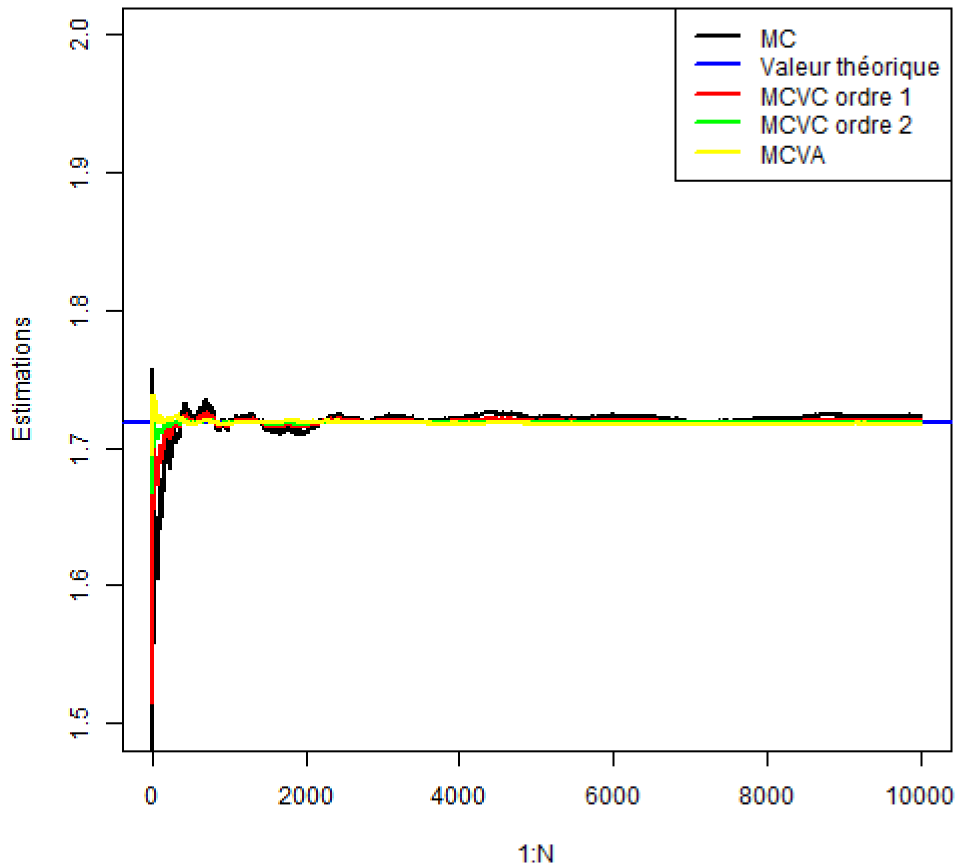
Alors $V(T_i) = -\frac{1}{2}e^2 + 3e - \frac{53}{18} \approx 0.043$

Implémentation: Donc nous allons estimer $I$ par $\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{x_i} - (1 + x_i)\right)\right] + \frac{3}{2}$

```
N=10000
X=runif(N) # X est de loi uniforme sur [0,1]
EstMC=mean(exp(X)) # Estimateur Monte Carlo simple
EstMCVA = 0.5*mean(exp(X) + exp(1-X)) # Estimateur MC avec Variable antithétique
EstMCVC_1 = mean(exp(X)-X-1) + 3/2 # Estimateur MC avec Variable de controle d'ordre 1
EstMCVC_1
```

```
## [1] 1.721148
```


MC
Valeur théorique
MCVC ordre 1
Estimations
2.0
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
0
2000
4000
6000
8000
10000
1:N



MC
Valeur théorique
MCVC ordre 1
MCVC ordre 2
MCVA
Estimations
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2.0
0
2000
4000
6000
8000
10000
1:N

**6**. $g(X) = e^X, \quad P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3)$

Or $E(\frac{X^2}{2}) = \int_0^1 \frac{x^2}{2} = 1/6, \quad E(\frac{X^3}{6}) = 1/24$

Donc $b = 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24$.

L'estimateur est donc $E(g(X) - P(X)) + b = E\left(e^X - (1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6})\right) + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24$

càd $\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(e^{x_i} - (1 + x_i + \frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i^3}{6})\right)\right] + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24$

++ (A vous de faire) : calcul de $cov(g, P)(> 0)$ et calcul de $V(g(X) - P(X) + b)$ pour voir qu'elle est réduite ($\approx 0.000188$)

```r
N=10000
X=runif(N) # X est de loi uniforme sur [0,1]
EstMC=exp(X) # Estimateur Monte Carlo simple
EstMCVA = 0.5*(exp(X) + exp(1-X)) # Estimateur MC avec Variable antithétique
EstMCVC_1 = exp(X)-X-1 + 3/2 # Estimateur MC avec Variable de controle d'ordre 1
EstMCVC_3= exp(X)-1-X-X^2/2-X^3/6+1+0.5+1/6+1/24
mean(EstMCVC_3)
```

```
## [1] 1.718283
```

```r
# comparaison de variances
var(EstMCVC_3)
```

```
## [1] 0.000184122
```

```r
Y=1-X
VA_VC_3 = exp(Y)-1-Y-Y^2/2-Y^3/6+1+0.5+1/6+1/24
EstMC_VA_VC3 = 0.5*(EstMCVC_3 + VA_VC_3)
mean(EstMC_VA_VC3)
```

```
## [1] 1.718349
```

```r
var(EstMC_VA_VC3)
```

```
## [1] 4.427144e-05
```

```r
var(EstMCVC_3)/var(EstMC_VA_VC3)
```

```
## [1] 4.158933
```

```r
var(EstMC)/var(EstMC_VA_VC3)
```

```
## [1] 5506.958
```

# TD4

On s'intéresse à $I = \int_{-1}^{1} \ln(x+2)dx$. On pose $g(x) = \ln(x+2)$

Soit $U \sim \mathcal{U}(-1,1)$ donc la densité de $U$ est $f_U(u) = \frac{1}{2} \times 1_{[-1,1]}(u)$

**1.** $I = \int_{-1}^{1} \ln(x+2)dx = \big[(x+2)\ln(x+2) - (x+2)\big]_{-1}^{1} = 3\ln(3) - 2$ = 1.295837

**2.** $E(g(U)) = \int_{-1}^{1} \ln(u+2) \times \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}I.$

Donc on propose d'estimer $I$ par $T = 2E(g(U))$ qu'on estime selon la méthode de MC simple par $2 \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(u_i + 2)$ où les $u_i \sim \mathcal{U}(-1,1)$.

**3.** $V(g(U)) = E(g^2(U)) - E^2(g(U))$

Or $E(g^2(U) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln^2(u+2)du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 \times \ln^2(u+2)du = \ldots$ IPP où $u' = 1$ et $v = \ln^2(u+2)$

$$= \frac{1}{2}\left([u\ln(u+2)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2u}{2+u}\ln(u+2)du\right) = \frac{1}{2}\left(\ln^2(3) - 2\int_{-1}^{1} \frac{u+2-2}{2+u}\ln(u+2)du\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln^2(3) - 2\int_{-1}^{1} \left(\ln(u+2) - 2\frac{\ln(u+2)}{2+u}\right)du\right) = \frac{1}{2}\left(\ln^2(3) - 2(3\ln(3) - 2) + 4\int_{-1}^{1} \frac{\ln(u+2)}{2+u}du\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln^2(3) - 2(3\ln(3) - 2) + 4[\frac{\ln^2(u+2)}{2}]_{-1}^{1}\right) = \ldots = \frac{3}{2}\ln^2(3) - 3\ln(3) + 2$$

Donc $V(g(U)) = 1 - \frac{3}{4}\ln^2(3)$ et $V(2g(U)) = 4V(g(U)) = 4 - 3\ln^2(3) \approx 0.38$

**4.**

```r
#1
I=3*log(3)-2
I
```

```
## [1] 1.295837
```

```r
#3
n=10000
U=runif(n,-1,1)
g=function(x)
{
  return(log(x+2))
}
EstMC=2*g(U)
print(mean(EstMC))
```

```
## [1] 1.301941
```

```r
print(var(EstMC))
```

```
## [1] 0.3757329
```

```r
Vtheorique=4-3*log(3)^2
Vtheorique
```

```
## [1] 0.3791531
```

**5.**

```
#5
Estimation=function(p,a)
{
  z=qnorm(1-(1-a)/2)
  n=(z*1/p*sqrt(Vtheorique))^2
  U=runif(n,-1,1)
  EstMC=2*g(U)
  return(mean(EstMC))
}

Estimation(1e-4, 0.05)
```

```
## [1] 1.293337
```

**6.**

```
Estimation2=function(f,a,b,p,alpha)
{
  U=runif(10000,a,b)
  Vest=(b-a)^2*var(f(U))
  n=(z*1/p*sqrt(Vest))^2
  U=runif(n,a,b)
  EstMC=(b-a)*f(U)
  return(mean(EstMC))
}

Estimation2(g,-1,1,1e-4, 0.05)
```

```
## [1] 1.295861
```

**7.** $P(a \leq V \leq b) = P(-b \leq -V \leq -a) = P(-b \leq U \leq -a) = \frac{-a+b}{2} = P(a \leq U \leq b)$

**8.** $TA = 2E(\frac{g(U)+g(-U)}{2})$ qu'on va estimer avec $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(u_i + 2) + \ln(-u_i + 2)$ où les $u_i \sim \mathcal{U}(-1, 1)$

```
#8
n=10000
U=runif(n,-1,1)
ESTMCAnti=2*1/2*(g(U)+g(-U))
print(mean(ESTMCAnti))
```

```
## [1] 1.29724
```

```
#9
print(var(ESTMCAnti))
```

```
## [1] 0.007025168
```