Feuille d'exerices

Complément de formation Statistiques

Mohamad Ghassany

Combinatoire

Exercice 1 On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir?
2. Combien de tirages peut-on obtenir ? contenant:
   a) 5 carreaux ou 5 coeurs;
   b) 2 coeurs et 3 piques;
   c) au moins 1 roi;
   d) au plus 1 roi.

Exercice 2 On jette un dé équilibré 3 fois de suite, et on s'intéresse au total des points obtenus. De combien de façons peut-on obtenir:

1. un total égale à 16.
2. un total égale à 15.
3. un total au moins égale à 15.

Événements

Exercice 3 Soit A,B et C trois événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Exprimer en fonction de A,B et C et des opérations ensemblistes (réunion, intersection et complémentaire) les événements ci-après:

1. A seul (parmi les 3 événements) se produit.
2. A et C se produisent, mais non B.
3. Les trois événements se produisent.
4. L'un au moins des 3 événements se produit.
5. Aucun des trois événements ne se produit.
6. Deux événements exactement se produisent.
7. Pas plus de deux événements ne se produisent.

Probabilité

Exercice 4 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A,B et C trois événements quelconques. On pose : $E = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ et $F = A \cap (B \cup C)$.

1. Montrer que E et F sont incompatibles.
2. Montrer que $E \cup F = A$.
3. Sachant que $P(A) = 0.6$; $P(A \cap B) = 0.2$; $P(A \cap C) = 0.1$ et $P(A \cap B \cap C) = 0.05$: Calculer $P(F)$ et $P(E)$.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 5 On choisit deux boules au hasard dans une urne contenant 8 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules oranges. Supposons que l'on reçoive 2 euros pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 euro pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour X et les probabilités associées à ces valeurs ?
2. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 6 Une urne contient une boule qui porte le numéro 0, deux qui portent le numéro 1 et quatre qui portent le numéro 3. On extrait simultanément deux boules dans cette urne.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente la somme des nombres obtenus.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E(X)$, $VX)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 7 Soit X une v.a. qui suit la loi uniforme (e.g. équiprobabilité de valeurs de X) sur l'ensemble $X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}$.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

   On définit la variable aléatoire $Y = (X + 1)^2$.
3. Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y.
4. Calculer $E(Y)$ de deux façons différents.

Exercice 8 Soient X et Y des variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant:

$X \backslash Y$	-1	0	2	5
0	0.10	0.05	0.15	0.05
1	0.15	0.20	0.25	0.05

1. Quelle est la loi marginale de X ?
2. Quelle est la loi marginale de Y ?
3. Calculer $P(Y \geq 0/X = 1)$.

4. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, et $cov(X, Y)$.
5. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 9 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = p, Y = q) = \lambda \frac{p+q}{p!q!2^{p+q}}$$

1. Déterminer λ.
2. Calculer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Lois Usuelles

Exercice 10 Une urne contient 2 boules de numéro 20, 4 boules de numéro 10 et 4 boules de numéro 5.

1. Une épreuve consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité p que la somme des numéros tirés soit égale à 30.
2. On répéte cette épreuve 4 fois en remettant à chaque fois les trois boules tirés dans l'urne. Soit X la v.a. indiquant le nombre de tirages donnant une somme de numéros égale à 30.
   (a) Quelle la loi de X. Donner son espérance et son écart-type.
   (b) Déterminer la probabilité d'avoir au moins une fois la somme 30 dans les 4 tirages.

Exercice 11 Vous avez besoin d'une personne pour vous aider à déménager. Quand vous téléphonez à un ami, il y a une chance sur quatre qu'il accepte. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'amis que vous devrez contacter pour obtenir cette aide.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $P(X \leq 3)$.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 12 Pour être sélectionné aux jeux olympiques, un athlète doit réussir deux fois à dépasser les minima fixés par sa fédération. Il a une chance sur trois de réussir à chaque épreuve à laquelle il participe. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'épreuves auxquelles il devra participer pour être sélectionné.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Si cet athlète ne peut participer qu'à quatre épreuves maximum, quelle est la probabilité qu'il soit sélectionné ?

Exercice 13 Un sac contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2. On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois.

1. (a) Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi usuelle que l'on précisera.
   (b) En déduire la loi de probabilité de Y.

2. (a) Préciser l'espérance mathématique et la variance de Z.
   (b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

Exercice 14 Le nombre de pannes d'électricité qui se produisent dans une certaine région au cours d'une période d'un an suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

1. Calculer la probabilité qu'au cours d'une période d'un an il y a exactement une panne qui se produit.
2. En supposant l'indépendance des pannes d'une année à l'autre, calculer la probabilité qu'au cours des dix prochaines années il y ait au moins une année pendant laquelle il se produira exactement une panne.

Exercice 15 Un poste de radio a 2 types de pannes: transistor ou condensateur. Durant la première année d'utilisation, on désigne par:

X = nombre de pannes dues à une défaillance de transistor.
Y=nombre de pannes dues à une défaillance de condensateur.

On suppose que X et Y sont des v.a. indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectives $\lambda = 2$ et $\mu = 1$.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait 2 pannes dues à une défaillance de transistor.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une panne due à une défaillance de condensateur.
3. (a) Quelle est la loi du nombre $Z = X + Y$ de pannes durant la première année ?
   (b) Déterminer la probabilité qu'il y ait 2 pannes de type quelconque.
   (c) Calculer $P(Z = 3)$. Que peut-on remarquer ?
   (d) Décrire les variations de $P(Z = k)$ en fonction de k.
   (e) Donner le nombre moyen de pannes et la probabilité qu'il y ait au plus une panne durant cette période.

Variables alétoires continues

Exercice 16 Soit X une v.a.c. de densité f définie par: $f(x) = kx\mathbb{1}_{]0,2[}(x)$.

1. Déterminer la constante k.
2. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.
3. On pose $Z = X^2$. Déterminer la densité de Z. Calculer $E(Z)$.

Exercice 17 Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Quelle est la valeur de c?
2. Quelle est la fonction de répartition de X?

Exercice 18 Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| > k > 0 \\ x+1 & \text{si} \quad |x| \leq k \end{cases}$$

1. Déterminer k.
2. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Soit $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la fonction de densité de Y.
5. Calculer $E(Y)$.

Exercice 19 Variable aléatoire de densité paire
Soit X une variable aléatoire réelle admettant une fonction **paire** f pour densité.

1. Calculer $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq 0)$.
2. Montrer que la fonction de répartition F de X vérifie: $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - F(-x)$.
3. On admet que X admet une espérance, calculer $E(X)$.
4. Donner un exemple de densité paire.

Loi usuelles continues

Exercice 20 Table de la loi Normale Centrée Réduite
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Soit X une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite, i.e. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. A l'aide de la table de la loi normale, calculer: $P(X > 2), P(-1 < X < 1.5)$ et $P(X < 0.5)$.
2. Soit Y une v.a. qui suite une loi normale: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(4, 16)$. Calculer: $P(Y > 2), P(-1 < Y < 1.5)$ et $P(Y < 0.5)$.
3. Soit $U \sim \mathcal{N}(6, 4)$. Calculer: $P(|U - 4| < 3)$ et $P(U > 6 | U > 3)$.

Exercice 21 Loi Normale
Une machine produit des pièces dont le diamètre X (en cm) est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance $\sigma^2 = (0.01)^2$. Quelle devrait être la valeur de μ de sorte que la probabilité qu'une pièce prise au hasard ait un diamètre supérieur à 3 cm, soit inférieur à 0.01?

Exercice 22 Loi Normale
On envisage de construire à l'entrée d'une caserne une guérite dans laquelle pourra s'abriter la sentinelle en cas d'intempéries. Les sentinelles sont des appelés dont la taille est approximativement distribuée selon une loi normale d'espérance 175cm et d'écart-type 7cm. A quelle hauteur minimale doit se trouver le toit de la guérite, pour qu'un sentinelle pris au hasard ait une probabilité supérieure à 0.95 de s'y tenir debout?

Exercice 23 Loi uniforme et loi exponentielle
Soit U une v.a.c de loi unifrorme sur $[0,1]$. Montrer que la v.a. $X = -\ln U$ suit une loi exponentielle.

Exercice 24 La loi exponentielle est sans mémoire

On suppose que la durée de vie D, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{100}$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule?
2. Calculer la fonction de répartition de D. En déduire l'expression de $P(D > x)$.
3. On dit qu'une variable aléatoire est *sans mémoire* si $\forall\, l > 0 \quad P(X \geq n + l | X \geq n) = P(X \geq l)$. Montrer que D est sans mémoire.
4. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son n^{e} jour, elle marche encore?

Exercice 25 Lois des v.a.r. `min(X,Y)` et `max(X,Y)`

Soit X et Y deux v.a.c de densités respectives f_X et f_Y et de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y. On suppose que X et Y sont indépendantes. On pose:

$$Z = max(X, Y) \qquad \text{et} \qquad T = min(X, Y)$$

1. Exprimer les fonctions de répartition de Z et T à l'aide des fonctions de répartition F_X et F_Y.
2. Exprimer une densité de Z et une densité de T à l'aide de f_X, f_Y, F_X et F_Y.

Exercice 26 Minimum et Maximum de deux lois exponentielles

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres λ_1 et λ_2. On pose $X = min(X_1, X_2)$.

1. Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux client rentrent simultanément, l'un choisit le guicher 1 et l'autre le guichet 2.
   (a) En moyenne, après combien de temps sort le premier?
   (b) En moyenne, après combien de temps sort le dernier?
   [**Indication:** On pourra utiliser la relation $X_1 + X_2 = min(X_1, X_2) + max(X_1, X_2)$. La somme de deux nombres réels est égale à la somme de leur minimum et de leur maximum]

Exercice 27 Fonction Gamma (Euler)

La fonction Gamma est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \forall\, x > 0$.
2. Exprimer $\Gamma(x + n)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\Gamma(1)$. En déduire $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En utilisant le changement de variable $t = u^2$, montrer qu'on a:

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du$$

5. On suppose que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Calculer alor $\Gamma(\frac{1}{2})$.

6. Montrer que $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$

7. En déduire la valeur de $\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

Exercice 28 Loi Gamma
Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, deux constantes réelles, on définit la fonction $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Montrer que $f_{a,\lambda}$ est bien une densité d'une v.a. X.
2. Calculer $E(X)$.

Couple de variables aléatoires continues

Exercice 29 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité jointe est définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha x e^{-y} & \text{si} \quad x \in [0,1], y \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

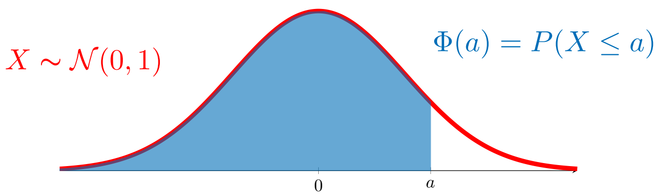
1. Déterminer α pour que $f(x, y)$ soit une fonction de densité.
2. Déterminer les densités marginales de X et Y.
3. X et Y sont elles indépendantes?

Exercice 30 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire uniformément distribué dans l'ensemble

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0,2] \,\text{et}\, y \in [0,4]\}$$

1. Déterminer la densité jointe du couple de variables aléatoires (X, Y).
2. Calculer $P(X \leq 1, Y \leq 2)$.
3. Déterminer les densités marginales de X et Y. Les v.a. X et Y sont elles indépendantes?

Table de la loi Normale centrée réduite



a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Par exemple, pour $x = 1.23$ (intersection de la ligne 1.2 et de la colonne 0.03), on obtient : $\Phi(1.23) \approx 0.8907$.