Feuille d'exercices

Probabilités

Exercice 1 - v.a.r. ayant une densité paire

Soit X une v.a.r. à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant une fonction paire f pour densité.

1. Calculer $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq 0)$.

2. Montrer que la fonction de répartition F de X vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 1 - F(-x)$.

3. On admet que X admet une espérance, calculer $E(X)$.

4. Donner un exemple de densité paire.

Exercice 2 - v.a.r. qui n'est ni à densité ni discrète

Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant une fonction paire f pour densité. On définit la v.a.r. Y sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \leq 0 \\ X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) > 0 \end{cases}$$

Montrer que Y n'est ni une v.a.r. à densité ni une v.a.r. discrète.

Pour la suite, toutes les v.a.r. sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Exercice 3 - Lois des v.a.r. $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$

Soient X et Y deux v.a.r. à densité, de densités respectives f_X et f_Y et de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y. On suppose que X et Y sont indépendantes. On pose :

$$Z = \max(X, Y) \quad \text{et} \quad T = \min(X, Y)$$

1. Exprimer les fonctions de répartition de Z et T à l'aide des fonctions de répartition F_X et F_Y.

2. En déduire que Z et T sont des v.a.r. à densité et exprimer une densité de Z et une densité de T à l'aide de f_X, f_Y , F_X et F_Y.

Exercice 4 - Minimum et maximum de deux lois exponentielles

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. On pose $X = \min(X_1, X_2)$.

1. Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2.

a) En moyenne, après combien de temps sort le premier ?

b) En moyenne, après combien de temps sort le dernier ?

[Indication : On pourra utiliser la relation $X_1 + X_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2)$. La somme de deux nombres réels est égale à la somme de leur minimum et de leur maximum]

Exercice 5 - Lois des v.a.r. $aX + b$ et X^2

Soit X une v.a.r. de densité f et de fonction de répartition F.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On pose $Y = aX + b$.

a) Exprimer la fonction de répartition de Y, F_Y en fonction de F. (Séparer les cas $a > 0$ et $a < 0$).

b) En déduire que Y est une v.a.r. à densité et exprimer une densité f_Y de Y en fonction de f.

2. On pose $Z = X^2$. Montrer que Z est une v.a.r. à densité et exprimer une densité de Z en fonction de f.

Exercice 6

Soit X une v.a.r. de densité f définie par : $f(x) = kx1_{]0,2[}(x)$.

1. Déterminer la constante k.

2. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.

3. On pose $Z = X^2$. Déterminer la densité de Z. Calculer $E(Z)$.

Exercice 7 - Lois normale centrée réduite

Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale centrée réduite, i.e. : $X \sim N(0, 1)$. Soit Φ sa fonction de répartition.

1. Montrer que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. En déduire $\Phi(0)$.
[Remarque : ce résultat explique pourquoi les tables de Φ ne donnent $\Phi(x)$ que pour $x \geq 0$]

3. En utilisant la table de Φ, déterminer $a > 0$ tel que $P(|X| \leq a) \geq 0.95$.

Exercice 8 - Lois normale

1. Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale centrée réduite, i.e. : $X \sim N(0, 1)$. A l'aide de la table de la loi normale, calculer : $P(X > 2)$, $P(-1 < X < 1.5)$ et $P(X < 0.5)$.

2. Soit Y une v.a.r. qui suit une loi normale, i.e. : $Y \sim N(m, \sigma^2) = N(4, 16)$. Calculer : $P(Y > 2)$, $P(-1 < Y < 1.5)$ et $P(Y < 0.5)$.

3. Soit U une v.a.r. qui suit une loi normale, i.e. : $U \sim N(m, \sigma^2)$. Sachant que $m = 6$ et $\sigma^2 = 4$, calculer : $P(|U - 4| < 3)$ et $P((U > 6)/(U > 3))$.

4. Déterminer l'écart-type σ et l'espérance m d'une v.a.r. V qui suit une loi normale telle que $P(V < 5) = 0.1587$ et $P(V < 20) = 0.9772$.

Exercice 9 - Loi de Laplace

Soit $c > 0$, une constante réelle. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{c}{2} e^{-c|x|}$$

1. Montrer que f est une densité d'une v.a.r. X. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

3. On admet que X admet une espérance. Calculer $E(X)$.

4. Plus généralement, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X^n admet une espérance. Calculer $E(X^n)$.

5. En déduire que X admet une variance $V(X)$ et la calculer.

6. Déterminer la loi de $Y = |X|$.

Exercice 10 - Loi uniforme et loi exponentielle

Soit U une v.a.r. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la v.a.r. $X = -\ln U$ suit une loi exponentielle.

Exercice 11 - Fonction Gamma (Euler)

La fonction Gamma est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

1. Monter que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \forall x > 0$.

2. Exprimer $\Gamma(x+n)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Calculer $\Gamma(1)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant le changement de variable $t = u^2$, montrer qu'on a :

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}du$$

5. On suppose que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Calculer alors $\Gamma(\frac{1}{2})$.

6. Montrer que :

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$$

7. En déduire la valeur de $\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

Exercice 12 - Loi gamma

Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, deux constantes réelles ; on définit la fonction $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Montrer que $f_{a,\lambda}$ est bien une densité d'une v.a.r. X.

2. On admet que X admet une espérance. Montrer que $E(X) = \frac{a}{\lambda}$.

Exercice 13 - Loi de (Rayleigh)

f est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}1_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Vérifier que f est une densité d'une v.a.r. X et tracer l'allure de sa courbe représentative.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ (on admettra qu'elles existent). On admet aussi que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. On pose $Y = X^2$. Montrer que Y suit une loi exponentielle et préciser le paramètre.

Exercice 14 - Loi de Cauchy

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

1. Montrer que f est une densité d'une v.a.r. X. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

3. Calculer $P(X \leq 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(X \leq 1)$ et $P(X \geq 1)$

4. La v.a.r. X admet-elle une espérance ?

5. On définie la v.a.r. Y par : $Y = \frac{1}{X}$. Montrer que X et Y ont la même loi.

6. On définie la v.a.r. Z par : $Z = \frac{1+X}{1-X}$.

- **a)** On note φ la fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$. Etudier les variation de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ er déterminer sa bijection réciproque.
- **b)** Déterminer la fonction de répartition de Z.
- **c)** En déduire que X et Z ont la même loi.

Exercice 15

On considère une v.a.r. X de loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E(X^{n+2}) = (n+1)E(X^n)$ [intégrer par parties].

2. Que vaut $E(X^2)$? Déduire de ce résultat et de la question précédente la valeur de $E(X^4)$.

3. Que vaut $E(X^3)$?

4. Soit Y la v.a.r. définie par $Y = 2X + 1$.

- **a)** Quelle est la loi de Y ?
- **b)** Déterminer $E(Y^4)$. [on pourra utiliser la formule du binôme et les moments de X trouvés précédemment]

5. A l'aide de la table de la loi normale, déterminer $P(|X| \geq 2)$. Que donne l'inégalité de Tchebychev (ci-après) dans ce cas ?

$$\forall x > 0, \qquad P(|X - E(X)| \geq x) \leq \frac{V(X)}{x^2}$$

Comparer et commenter.

6. On considère maintenant que X suit une loi normale de moyenne 7 et d'écart-type 4.

- **a)** Déterminer $P(X \leq 8)$ et $P(5 \leq X \leq 9)$.
- **b)** Déterminer a tel que $P(X > a) = 0.9$.

7. La taille des élèves d'un Lycée est distribuée selon une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ. On sait qu'un cinquième des élèves mesurent moins de $1m50$ et que 10% des élèves mesurent plus de $1m80$. Déterminer m et σ.

Exercice 16

En utilisant l'inégalité de Tchebychev : $\forall x > 0, \; P(|X - E(X)| \geq x) \leq \frac{V(X)}{x^2}$, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - \frac{1}{x^2})$$

Exercice 17

Soit N une v.a.r. qui suit une loi normale centrée réduite. Prouver que pour tout $x > 0$, on a :

$$(a)\ P(N > x) = P(N < -x) \quad (b)\ P(|N| > x) = 2P(N > x) \quad (c)\ P(|N| \leq x) = 2P(N < x) - 1$$

Exercice 18

Soit Z une v.a.r. distribuée selon une loi $N(m; \sigma^2)$, avec $m = 1$ et $\sigma = 2$.

1. Calculer les probabilités suivantes :

$$(a)\ P(Z < 0) \quad (b)\ P(Z > \frac{1}{2}) \quad (c)\ P(|Z - 1| \leq 4)$$

2. Résoudre les équations en x suivantes :

$$(a)\ P(Z > x) = 0.5 \quad (b)\ P(-2x < Z - 1 < 2x) = 0.98 \quad (c)\ P(Z \leq x) = 0.2$$