EXERCICE 1 :

On jette un dé trois fois.

1/ Décrire l'ensemble fondamental de cette expérience.

2/ Quelle est la probabilité pour que la somme des dés soit supérieure ou égale à 15 ?

EXERCICE 2 :

Dans une ville, il existe trois lycées 1, 2, 3. Dans chacun de ces lycées la probabilité de réussir un examen est donnée dans le tableau ci-dessous :

Lycée	**Nombre d'élèves préparant l'examen**	**Probabilité de réussite**
1	30	0.85
2	60	0.80
3	70	0.65
Total	160	

Quelle est la probabilité qu'un élève pris au hasard de cette ville obtienne cet examen ?

EXERCICE 3 :

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 :
U_1 contient 7 boules noires et 3 boules blanches ;
U_2 contient 4 boules noires et 4 boules blanches ;
U_3 contient 1 boule noire et 4 boules blanches.

On choisit une urne au hasard et l'on tire une boule.

1/ Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ?
2/ Sachant que cette boule est noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

EXERCICE 4 :

On considère deux urnes U1 et U2 :
U1 contient 4 boules rouges et 2 boules blanches ;
U2 contient 2 boules rouges et 4 boules blanches.
On choisit l'une d'elles au hasard et l'on y procède à des tirages successifs, avec remise.

1/ Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage

2/ Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au troisième tirage sachant qu'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers tirages

3/ Calculer la probabilité p_n d'avoir effectué les tirages dans l'urne U1, sachant qu'in a obtenu une boule rouge aux n premiers tirages

EXERCICE 5 :

Deux cours ont lieu simultanément dans deux amphithéâtres contigus. Les deux amphithéâtres, appelés A et B, contiennent respectivement 90% et 50 % de jeunes filles et dans B il y a quatre fois plus d'étudiants (garçons ou filles) que dans A. Les deux amphithéâtres se vidant dans le même couloir, calculer la probabilité qu'une jeune fille choisie au hasard sorte de A.

EXERCICE 6 :

Les pourcentages de production et de déchet de 4 machines sont fournis par le tableau suivant :

	Production	**Déchets**
Machine 1	15 %	5%
Machine 2	20%	4%
Machine 3	30%	3%
Machine 4	35%	2%

Au contrôle, on constate qu'une pièce est défectueuse
Quelle est la probabilité pour qu'elle vienne d'une machine donnée ?

EXERCICE 7 :

On lance simultanément deux dés discernables
Soient les événements :
A = « le résultat du premier dé est pair »
B = « le résultat du deuxième dé est impair »
C = « les résultats des deux dés ont même parité »

Etudier l'indépendance deux à deux puis dans leur ensemble des événements A, B , C relativement à l'équiprobabilité (i.e les dés ne sont pas pipés)

EXERCICE 8 :

Un menu doit être composé en choisissant une entrée parmi 4, un plat parmi 3 et un dessert parmi 5. Calculer le nombre de menus différents.

EXERCICE 9 :

On lance 3 fois 1 dé. Calculer le nombre de résultats possibles de deux façons.

****** Les problèmes d'urnes ******

Les tirages dans une urne sont intéressants à étudier car ils permettent de modéliser un grand nombre d'expériences même si celles-ci ne consistent pas réellement à l'extraction de boules d'une urne

EXERCICE 10:

Une urne de 10 boules contient 3 boules noires et 7 boules blanches.
On tire simultanément 5 boules de cette urne. Soit A l'événement « il y a 2 boules noires parmi le tirage effectué.
1/ Calculer Card(A)
2/ Calculer la probabilité de A dans le cas de l'équiprobabilité
3/ Généraliser la formule avec n boules au total dans l'urne, n_1 boules noires et n_2 boules blanches et un tirage de p boules parmi les n .

EXERCICE 11:

Une urne de 10 boules contient 3 boules noires et 7 boules blanches.
On tire l'une après l'autre et avec remise 5 boules de cette urne. Soit A l'événement : « il y a 2 boules noires parmi le tirage effectué »
1/ Calculer Card(A)
2/ Calculer la probabilité de A dans le cas de l'équiprobabilité
3/ Généraliser la formule avec n boules au total dans l'urne, n_1 boules noires et n_2 boules blanches et un tirage de p boules parmi les n .

EXERCICE 12 :

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. Déterminer la probabilité de tirer trois nombres dont la somme est 8.
1/ Pour des tirages sans remise
2/ Pour des tirages avec remise

EXERCICE 13 :

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble {- 4; 2; 3; 4; 6; 7; 10} et dont la distribution est donnée par :

X	- 4	2	3	4	6	7	10
P(X=x)	0.1	0. 2	0.2	0.1	0.05	0.2	K

1. Calculez K.
2. Représentez graphiquement la loi de X.
3. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :
   $X > 3$, $X \geq 3$, $X > 9$, $X \geq 9$, $3 \leq X \leq 7$, $3 < X < 9$, $X + 2 > 3$, $X^2 > 4$.
4. Représentez graphiquement la loi de X + 2.

EXERCICE 14 :

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé .
1/ Déterminer la loi de X, calculer son espérance
2/ On pose $Y=1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance

EXERCICE 15 :

On choisit deux boules au hasard dans une urne contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 euros pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 euro pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X. Quelles sont les valeurs possibles pour X et les probabilités associées à ces valeurs ? Quelle est l'espérance de X ?

EXERCICE 16 :

On lance un dé équilibré. Soit X le résultat obtenu.
1. Quelle est la loi de X ? Quelle est la fonction de répartition de X ?
2. Calculez l'espérance et la variance de X.
3. Quelle est la loi de X + 2 ? Même question pour X^2.
4. Calculez l'espérance et la variance des v.a. de la question précédente. Interprétez ces résultats.

EXERCICE 17:

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	-1	0	2	5
0	0.10	0.05	0.15	0.05
1	0.15	0.20	0.25	0.05

(i) Quelle est la loi marginale de X ?
(ii) Quelle est la loi marginale de Y ?
(iii) Calculer $P(Y \geq 0 / X = 1)$.
(iv) Calculer $E[X]$, $E[Y]$, et $cov(X, Y)$.
(v) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 18:

On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans la boîte. Soit X le numéro de la boîte, et Y le numéro de la boule.
1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$

EXERCICE 19:

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.
On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois pile ?

EXERCICE 20:

Une machine fonctionne grâce à 24 composantes identiques. La probabilité qu’une composante tombe en panne est égale à q=0.2. La machine fonctionne quand au moins deux tiers des composantes sont en marche.
Calculer la probabilité du fonctionnement de l’engin.

EXERCICE 20 bis :

Un lot contient 3% de pièces défectueuses.
On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considéré comme fait du hasard et avec remise.
Soit X la variable aléatoire « nombre de pièces défectueuses dans l’échantillon ».
1/ Quelle est la loi de X ?
2/ Que valent $E(X)$ et $Var(X)$
3/ Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 1)$.

EXERCICE 21 :

Une urne contient 5 boules toutes distinctes. On tire 3 boules une à une et avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules différentes tirées, déterminer la loi de X.

EXERCICE 22 :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n, $n>2$. On effectue deux tirages, soit X le plus grand des numéros et Y le plus petit.
Déterminer la loi de X et de Y.

EXERCICE 23 :

Une variable aléatoire X représente le nombre annuel de pannes d'un certain type d'appareils électroniques.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
1/ Déterminer λ sachant que la probabilité pour qu'un appareil de ce type n'ait pas de panne dans l'année est de 0.368. Calculer la probabilité pour qu'un appareil ait au plus 2 pannes dans l'année.
2/ On teste 10 appareils au cours d'une année et soit Y le nombre d'appareils ayant eu au moins une défaillance au cours de l'année.
Déterminer la loi de Y (préciser éventuellement les hypothèses nécessaires).

EXERCICE 24 :

En moyenne, une région est frappée dans l'année par 5.2 ouragans. Quelle est la probabilité qu'au plus 3 ouragans vont la toucher cette année ?

EXERCICE 25 :

Un jouet se trouve caché dans l'une des N boîtes fermées où un enfant le cherche. Celui-ci ouvre une boîte au hasard et recommence jusqu'à ce qu'il trouve le jouet. On suppose qu'à chaque tentative il a oublié le résultat de toutes les précédentes.
Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X égale au nombre de tentatives effectuées jusqu'à la découverte du jouet, puis calculer son espérance.
Préciser le nombre N_0 de boîtes si l'enfant a environ trois chances sur quatre de trouver le jouet à l'issue de ses trois premières tentatives.

EXERCICE 26 :

Un QCM comporte 20 questions et chaque question a k ($k \geq 2$) réponses possibles dont une seule est juste. On obtient un point par réponse juste.
Déterminer k pour qu'un candidat répondant au hasard obtienne en moyenne 5/20.

EXERCICE 27:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Vérifier que F est bien une fonction de répartition
2. Représenter graphiquement F
3. X est-elle une variable aléatoire discrète ou continue ?
4. Calculer les probabilités suivantes :
   $P(X < 1)$, $P(X \leq 1.5)$, $P(0.5 < X < 2)$
5. X admet-elle une fonction de densité ? Si oui, la déterminer et la représenter graphiquement
6. Calculer l'espérance de X

EXERCICE 28:

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la fonction de densité est donnée par la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante a
2. Calculer E(X) et $E(X^2)$
3. Déterminer la fonction de densité de $Y = X^2$
4. Calculer E(Y). Que constatez-vous ?

EXERCICE 29:

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la fonction de densité est donnée par la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \quad |x| > k > 0 \\ x+1 & \text{si } \quad |x| \leq k \end{cases}$$

1. Déterminer k
2. Calculer E(X) et $E(X^2)$
3. Déterminer la fonction de répartition de X
4. Soit $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la fonction de densité de Y
5. Calculer E(Y). Que constatez-vous ?

EXERCICE 30:

Un artisan plombier, spécialisé dans les travaux de réparation à domicile occupe 4 ouvriers par semaine qui travaillent chacun 35 heures par semaine et pas plus. Les affaires de notre plombier marchant plutôt bien, il est sans cesse obligé de refuser du travail, et il se demande s'il ne devrait pas embaucher un ouvrier supplémentaire, qui travaillera 35 heures par semaine mais pas plus.
L'expérience a permis à notre plombier de connaitre sa demande hebdomadaire totale, Q, (exprimée en heures de travail), qui s'adresse à lui. Il sait ainsi que Q, qui est une variable aléatoire supposée continue, est uniformément distribuée dans l 'intervalle [140,200]. On sait par ailleurs que l'artisan paie chaque ouvrier 50 euros de l'heure (qu'il y ait du travail ou non) et qu'il rapporte 70 euros de l'heure travaillée.

1. Le profit hebdomadaire de l'artisan, Π, recette totale moins coût total, est il une variable aléatoire lorsqu'il embauche 4 ouvriers par semaine?
2. Calculer ce profit.
3. Calculer le profit de notre artisan lorsqu'il dispose de 5 ouvriers, si, pour une semaine donnée, Q = 160.
4. Calculer le profit de notre artisan lorsqu'il dispose de 5 ouvriers, si, pour une semaine donnée, Q = 180.
5. Le profit hebdomadaire de l'artisan est il une variable aléatoire lorsqu'il embauche 5 ouvriers par semaine?
6. Calculez le profit espéré lorsque notre artisan embauche 5 ouvriers. (Réfléchissez!)
7. Sur la base du profit espéré, notre artisan devrait il embaucher ce cinquième ouvrier?
8. Calculez la probabilité que le profit soit supérieur ou égal à 2450 euros lorsque notre artisan embauche 5 ouvriers.

EXERCICE 31:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, c'est-à-dire que $X \sim N(0,1)$ et $Y \sim N(\mu, \sigma)$.
On vous demande de calculer les probabilités suivantes en vous servant de la table de la loi normale.
1. Calculez $P(X > 2)$, $P(-1 < X < 1.5)$, $P(X < 0.5)$.
2. Soit $Y \sim N(4,4)$. Calculez $P(Y > 2)$, $P(-1 < Y < 1.5)$, $P(Y < 0.5)$.
Soit W une variable aléatoire qui suit une loi normale. On sait que E(W) = 6 et Var(W) = 4.
On vous demande de calculer les probabilités suivantes :
3. $P(|W - 4| < 3)$
4. $P(W > 6/W > 3)$

5. Déterminez l'écart type σ et l'espérance μ d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale telle que P(X < 5) = 0.1587 et P(X < 20) = 0.9772.

EXERCICE 32

Une machine produit des pièces dont le diamètre X (en cm) est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance $\sigma^2 = (0.01)^2$.
Quelle devrait être la valeur de μ de sorte que la probabilité qu'une pièce prise au hasard ait un diamètre supérieur à 3cm, soit inférieur à 0.01 ?

EXERCICE 33

On envisage de construire à l'entrée d'une caserne une guérite dans laquelle pourra s'abriter la sentinelle en cas d'intempéries. Les sentinelles sont des appelés dont la taille est approximativement distribuée selon une loi normale d'espérance 175cm et d'écart-type 7cm.
A quelle hauteur minimale doit se trouver le toit de la guérite, pour qu'un sentinelle pris au hasard ait une probabilité supérieure à 0.95 de s'y tenir debout ?

EXERCICE 34

Une usine utilise une machine automatique pour remplir des flacons contenant un certain produit en poudre. Par suite de variations aléatoires dans le mécanisme, le poids de poudre par flacon est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type 1.1mg.
Les flacons sont vendus comme contenant 100mg de produit.

1. La machine est réglée sur μ=101.2mg. Quelle est la probabilité que le poids de produit dans un flacon pris au hasard soit inférieur au poids annoncé de 100mg ?
2. Sur quelle valeur de μ faut-il régler la machine pour que cette probabilité soit inférieure à 0.04 ?

EXERCICE 35:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la densité jointe est définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx\exp(-y) & \text{si} \quad x \in [0,1],\, y \in \Re^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer C pour que f(x; y) soit une fonction de densité
2. Déterminer les densités marginales de X et de Y . Les variables aléatoires X et de Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 36:

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire uniformément distribué dans l'ensemble

$$D = \{(x,y) \in \Re^2 \text{ tel que } x \in [0,2] \text{ et } y \in [0,4]\}$$

1. Déterminer la densité jointe du couple de variable aléatoire (X,Y)
2. Calculer $P(X \leq 1, Y \leq 2)$
3. Déterminer les densités marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et de Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 37:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la densité jointe est définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f(x,y) est bien une fonction de densité
2. Déterminer les densités marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et de Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer $f_{X/Y=y}(x)$ la densité de X conditionnelle à Y = y. Vérifier qu'il s'agit bien d'une fonction de densité.

EXERCICE 38:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la densité jointe est définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\exp(-(x + y)) & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f(x,y) est bien une fonction de densité
2. Calculer la probabilité suivante : P(X + Y < 1)
3. Déterminer les densités marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et de Y sont-elles indépendantes ?