Exercices : Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 *La loi d'un couple est donnée par le tableau suivant :*

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0	0,4	0
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0	0,2

On a donc, par exemple $P((X=2)\cap(Y=1))=0,1$ *et* $P((X=1)\cap(Y=3))=0$.
1) Donner les lois marginales de X *et* Y.
2) Les variables X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 2 *Soient* α *un réel positif et* a *un réel élément de* $]0,1[$.
Soient X *et* Y *deux variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que leur loi conjointe est donnée par :
$\forall (i,j)\in\mathbf{N}^2, P((X=i)\cap(Y=j))=\alpha(i+j)a^i(1-a)^j$.
1) Déterminer α *en fonction de* a.
2) Donner les lois de X *et* Y.
3) X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 3 *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}^2$ *tel que*

$$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, P((X=p)\cap(Y=q))=\lambda\frac{p+q}{p!q!2^{p+q}}$$

1) Déterminer λ.
2) Calculer les lois marginales.
3) Les variables aléatoires X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 4 *On désigne par* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre* p $(0<p<1)$.
Déterminer la loi de X_1+X_2.

Exercice 5 *On lance indéfiniment une pièce qui donne Pile avec une probabilité* p *(avec* $0<p<1$*) et Face avec la probabilité* $1-p$. *Pour tout* k *de* $\mathbb{N}^*$, *on note* P_k *l'événement : "obtenir un Pile au* $k^{\text{ème}}$ *tirage" et* F_k *l'événement : " obtenir un Face au* $k^{\text{ème}}$ *tirage". On note également* X *la variable aléatoire égale au rang du premier Pile et* Y *la variable aléatoire égale au rang du deuxième Pile.*
1) Déterminer la loi du couple (X,Y). *On trouvera :*
$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2,+\infty[\![, i<j, P(X=i\cap Y=j)=q^{j-2}p^2$.
$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2,+\infty[\![, i\geq j, P(X=i\cap Y=j)=0$.
2) Déterminer les lois de X *et* Y.
3) Les variables X *et* Y *sont-elles indépendantes.*

Exercice 6 *On dispose de* n *boîtes numérotées de* 1 *à* n. *La boîte* k *contient* k *boules numérotées de* 1 *à* k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X *le numéro de la boîte et* Y *le numéro de la boule.*
1) Déterminer la loi du couple (X,Y).
2) Calculer $P(X=Y)$.
3) Déterminer la loi de Y *et* $E(Y)$.

Exercice 7 *Soient* X *et* Y *deux V.A.R. indépendantes, prenant toutes les valeurs entières entre* 1 *et* n*, avec les probabilités :* $P(X=k)=P(Y=k)=\dfrac{1}{n}$ *pour tout* $k\in[\![1,n]\!]$*.*
Calculer $P(X=Y)$ *et* $P(X\geq Y)$*. Déterminer la loi de* $D=X-Y$*.*

Exercice 8 *Soient* X *et* Y *deux V.A.R. indépendantes vérifiant :*
$P(X=n)=P(Y=n)=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1+a^n}{n!})$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*.*
1) Déterminer a*.*
2) Calculer $E(X)$ *et* $V(X)$*.*
3) Déterminer la loi de $S=X+Y$*.*

Exercice 9 *On choisit* X *au hasard dans* $[\![1,2n]\!]$*, et* Y *au hasard dans* $[\![1,X]\!]$*.*
Soit : $p_n=P((Y\leq n)\cap(X\geq n)\cap(X-Y\leq n))$*.*
Calculer $lim_{n\to+\infty}p_n$*.*

Exercice 10 *Soient* X *et* Y *deux V.A.R. telles que* $Y=X^2$ *et que la loi de* X *soit donnée par le tableau :*

x_i	-2	-1	0	2	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1) Donner la loi conjointe de X *et* Y*.*
2) Déterminer la loi de Y*.*
3) X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
4) Calculer $cov(X,Y)$*.*

Exercice 11 *Soit* a *un nombre réel. Soient* X *et* Y *deux V.A.R. à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $P[(X=k)\cap(Y=j)]=\dfrac{a}{2^{k+1}j!}$ *pour tout* $(k,j)\in\mathbb{N}^2$*.*
1) Déterminer a*.*
2) X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
3) Déterminer $cov(X,Y)$*. Conclusion ?*

Exercice 12 *Soit* X *une V.A.R. discrète telle que* $0\leq X\leq 1$*. On suppose que* X *admet un moment d'ordre* 2*. Démontrer que* $V(X)\leq\dfrac{1}{4}$*.*

Exercice 13 *Soit* X *une V.A.R. à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *et admettant une espérance.*
1) Montrer que $\dfrac{1}{X}$ *admet une espérance.*
2) Développer $E((t\sqrt{X}+\dfrac{1}{\sqrt{X}})^2)$ *et en déduire que* $E(X)E(\dfrac{1}{X})\geq 1$*.*

Exercice 14 ***Inégalité de Jensen***
Soit X *une V.A.R. à valeurs dans* $\mathbb{N}$*. Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *dérivable telle que* f' *est croissante(*f *est donc convexe). On suppose que* X *et* $f(X)$ *admettent toutes deux une espérance.*
On se propose de démontrer l'inégalité de Jensen

$$f(E(X))\leq E(f(X))$$

1) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq f'(E(X))(x-E(X))+f(E(X))$*.*
2) En déduire l'inégalité de Jensen.

Exercice 15 *Soient X et Y deux V.A.R discrètes admettant une variance.*
1) Montrer que XY admet une espérance et que :

$$E(|XY|) \leq \frac{1}{2}(E(X^2) + E(Y^2))$$

2) Montrer que $E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

Exercice 16 *On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Soient X la variable prenant pour valeur le nombre de Pile obtenus moins 1, et Y la la variable prenant pour valeur le nombre de Pile au deuxième lancer moins le nombre de Pile au premier lancer.*
1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2) Calculer $cov(X, Y)$.
3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 17 *Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes dont la loi est donnée par le tableau suivant :*

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$0,08$	$0,04$	$0,16$	$0,16$
2	$0,04$	$0,02$	$0,08$	$0,06$
3	$0,08$	$0,04$	$0,16$	$0,12$

1) Déterminer les lois marginales du couple et préciser si X et Y sont indépendantes.
2) Calculer $cov(X, Y)$.
3) Déterminer la loi du couple $(min(X, Y), max(X, Y))$.

Exercice 18 *On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée ; X et Y désignent respectivement le nombre de Face apparues lors des deux premiers lancers et le nombre de Pile apparus lors des deux derniers.*
1) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis les lois marginales de X et Y.
2) X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Calculer $cov(X, Y)$.

Exercice 19 *Soient X et Y deux variables indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et distribuées uniformément, c'est-à-dire $P(X = -1) = P(X = 1) = P(Y = -1) = P(Y = 1) = 0,5$.*
On considère $Z = XY$.
1) Déterminer la loi de Z puis la loi du couple (X, Y).
2) Les variables X, Y et Z sont-elles indépendantes ?
3) Les variables X, Y et Z sont-elles mutuellement indépendantes.

Exercice 20 *Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-a, -b, b, a\}(0 < b < a)$ distribuée uniformément, c'est-à-dire $P(X = -a) = P(X = -b) = P(X = b) = P(X = a) = 0,25$.*
1) Déterminer la loi de X^2 et la loi du couple (X, X^2).
2) Calculer $cov(X, X^2)$.
3) Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 21 *Soient X et Y suivent toutes les deux une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Montrer que :*
X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow cov(X, Y) = 0$.

Exercice 22 *Soit X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et soit Y une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$ est la loi $\mathcal{B}(k, q)$.*
1) Montrer que $\forall \alpha \in [\![0, n]\!], \forall \alpha \in [\![\alpha, n]\!]$, $\binom{i}{\alpha}\binom{n}{i} = \binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{i-\alpha}$.
2) Déterminer la loi de Y.

Exercice 23 *Une particule se déplace sur une droite graduée. À l'instant zéro, la particule est en zéro. À l'issue de chaque instant, elle s'est déplacée d'une unité dans le sens positif avec la probabilité* p, *ou dans le sens négatif avec la probabilité* $1-p$. *On note* X_n *la variable aléatoire prenant pour valeur l'abscisse de la particule à l'issue de l'instant* n.
1) Déterminer $P(X_n = 0)$.
2) Calculer $E(X_n)$ *et* $V(X_n)$.
Indication : on pourra décomposer X_n *comme une somme de V.A.R. qui prennent les valeurs* $+1$ *et* -1.

La fonction génératrice .

Exercice 24 *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *On note* g_X *sa fonction génératrice, définie sur un intervalle de la forme* $]-R, R[$ *(avec* $R > 1$*).*
Les questions suivantes sont indépendantes.
1) Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. *Justifier l'existence de la fonction génératrice de* $aX + b$. *La déterminer en fonction de* g_X.
2) Justifier que g_X *est définie en* 1 *et en* -1. *En déduire que*
$P(X \text{ pair}) = \dfrac{g_X(1) + g_X(-1)}{2}$ *et* $P(X \text{ impair}) = \dfrac{g_X(1) - g_X(-1)}{2}$.
3) Si X *suit la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *quelle est la probabilité que* X *soit pair ? Et si* X *suit la loi géométrique de paramètre* p *?*

Exercice 25 *Soit* X *une variable aléatoire telle que* $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *et que*
$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = ak^2 \dfrac{\lambda^k}{k!}$.
où λ *est un réel strictement positif donné et* a *un réel à déterminer.*
1) En supposant qu'une telle variable puisse être définie, quelle est sa fonction génératrice ?
2) En déduire la valeur de a.
3) Calculer $E(X)$.

Exercice 26 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que* X *suit la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *et* Y *suit la loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(p)$.
On pose $Z = XY$ *et on note* g_X, g_Y *et* g_Z *les fonctions génératrices de ces variables aléatoires.*
1) Donner la fonction génératrice de Y.
2) Démontrer que $g_Z = g_Y o g_X$.
3) En déduire $E(Z)$ *et* $V(Z)$.

Exercice 27 *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *de fonction génératrice*

$$\forall u \in \mathbb{R}, g_X(u) = ae^{1+u^2}$$

1) Déterminer a.
2) Donner la loi de X *et calculer son espérance et sa variance.*

Exercice 28 *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *dont la fonction génératrice est*

$$\forall s \in]-2, 2[, g_X(s) = \frac{s}{2 - s^2}$$

1) Déterminer la loi de X.
2) Reconnaître la loi de $Y = \frac{1}{2}(X - 1)$.
3) En déduire $E(X)$ *et* $V(X)$.

Exercice 29 *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *et* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{e^{-2}2^{k-2}}{k!}(1 + \alpha k)$$

1) Montrer que $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
2)Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$P(= k) = \frac{1}{4}P(X = k) + \frac{3}{4}P(Z = k - 1)$$

où Y *et* Z *sont deux variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre* 2.
3) En déduire la fonction génératrice de X.

Exercice 30 . ***Loi de Pascal*** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in]0, 1[$. *On note* $q = 1 - p$.
1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[\dfrac{1}{(1 - x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} x^k$.
2) Démontrer que la suite de réels $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k$ *définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *On la dénomme " loi de Pascal de paramètres* n *et* p*".*
3) Soit X *une variable aléatoire suivant la loi définie à la question précédente.*
a) Déterminer la fonction génératrice de X.
b) En déduire que X *admet une espérance et une variance et les calculer.*
4) Deux variables aléatoires X *et* Y *indépendantes suivant deux lois de Pascal de paramètres respectifs* (n, p) *et* (m, p). *On pose* $S = X + Y$. *Déterminer la loi de* S.

Couples aléatoires à densité.

<u>Exercice</u> 31 . *Dans le carré unité, on choisit au hasard un point (X,Y), c'est-à-dire*

$$\forall S \subset [0,1]^2, P((X,Y) \in S) = aire(S)$$

1) Donner une densité de (X,Y).
2) Déterminer les lois de X et Y.
3) X et Y sont-elles indépendantes ?

<u>Exercice</u> 32 . *Soit le polynôme $P(X) = X^2 - 2AX + B$. On suppose que A et B sont des VAR. indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.*
1) Quelle est la probabilité que P possède deux racines réelles distinctes ?
2) Quelle est la probabilité que P possède une racine double ?
3) Quelle est la probabilité que P possède deux racines complexes (et non réelles) ?

<u>Exercice</u> 33 . *Soit (X,Y) de loi uniforme sur $D(0,R)$, disque de centre 0 et de rayon R ($R > 0$).*
1) Donner une densité de (X,Y).
2) Déterminer les densités marginales de X et Y.
3) X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $cov(X,Y)$.
5) Soit $U = \sqrt{X^2+Y^2}$.Déterminer la fonction de répartition, une densité et l'espérance de U.

<u>Exercice</u> 34 . *Soit f définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} ae^{-(x+y)} & si \quad 0 \leq x \leq y \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Déterminer a pour que f soit la densité d'un vecteur aléatoire $V = (X,Y)$.
2) Déterminer les densités marginales de X et Y.
3) Les composantes sont-elles indépendantes ?

<u>Exercice</u> 35 . *Soient X et Y deux V.A.R. qui suivent une loi normale.*
1) Leur somme $Z = X + Y$ suit-elles nécessairement une loi normale ?
2) En supposant en plus $cov(X,Y), Z$ suit-elle une loi normale ?
3) Le vecteur $V = (X,Y)$ est-il nécessairement gaussien ?

<u>Exercice</u> 36 . *Soient X et Y deux V.A.R. à densité. Le vecteur $V = (X,Y)$ est-il nécessairement un vecteur à densité ?*