

Feuille d'exercices 2

Variables aléatoires continues et Lois usuelles continues

Mohamad Ghassany

Variables aléatoires continues

Exercice 1 Soit X une v.a.c. de densité f définie par: $f(x) = kx \mathbb{1}_{]0,2[}(x)$.

1. Déterminer la constante k .
2. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.
3. On pose $Z = X^2$. Déterminer la densité de Z . Calculer $E(Z)$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > k > 0 \\ x+1 & \text{si } |x| \leq k \end{cases}$$

1. Déterminer k .
2. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X .
4. Soit $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la fonction de densité de Y .
5. Calculer $E(Y)$.

Exercice 4 On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X .

- Déterminer la fonction de répartition F de la variable X . Construire sa représentation graphique.
- Calculer l'espérance de X .
- Calculer la probabilité de l'événement $[0.488 < X < 1.2]$.

Loi usuelles continues

Exercice 5 Loi uniforme et loi exponentielle

Soit U une v.a.c de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la v.a. $X = -\ln U$ suit une loi exponentielle.

Exercice 6 La loi exponentielle est sans mémoire

On suppose que la durée de vie D , en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{100}$.

- Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule?
- Calculer la fonction de répartition de D . En déduire l'expression de $P(D > x)$.
- On dit qu'une variable aléatoire est *sans mémoire* si $\forall l > 0 \quad P(X \geq n + l | X \geq n) = P(X \geq l)$. Montrer que D est sans mémoire.
- Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son n^{e} jour, elle marche encore?

Exercice 7 Lois des v.a.r. $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$

Soit X et Y deux v.a.c de densités respectives f_X et f_Y et de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y . On suppose que X et Y sont indépendantes. On pose:

$$Z = \max(X, Y) \quad \text{et} \quad T = \min(X, Y)$$

- Exprimer les fonctions de répartition de Z et T à l'aide des fonctions de répartition F_X et F_Y .
- Exprimer une densité de Z et une densité de T à l'aide de f_X, f_Y, F_X et F_Y .

Exercice 8 Minimum et Maximum de deux lois exponentielles

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres λ_1 et λ_2 . On pose $X = \min(X_1, X_2)$.

- Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2.
 - En moyenne, après combien de temps sort le premier?
 - En moyenne, après combien de temps sort le dernier?

[Indication: On pourra utiliser la relation $X_1 + X_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2)$. La somme de deux nombres réels est égale à la somme de leur minimum et de leur maximum]

Exercice 9 Variable aléatoire de densité paire

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une fonction **paire** f pour densité.

1. Calculer $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq 0)$.
2. Montrer que la fonction de répartition F de X vérifie: $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - F(-x)$.
3. On admet que X admet une espérance, calculer $E(X)$.
4. Donner un exemple de densité paire.

Exercice 10 Table de la loi Normale Centrée Réduite

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Soit X une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite, i.e. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. A l'aide de la table de la loi normale, calculer: $P(X > 2)$, $P(-1 < X < 1.5)$ et $P(X < 0.5)$.
2. Soit Y une v.a. qui suite une loi normale: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(4, 16)$. Calculer: $P(Y > 2)$, $P(-1 < Y < 1.5)$ et $P(Y < 0.5)$.
3. Soit $U \sim \mathcal{N}(6, 4)$. Calculer: $P(|U - 4| < 3)$ et $P(U > 6 | U > 3)$.

Exercice 11 Loi Normale

Une machine produit des pièces dont le diamètre X (en cm) est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance $\sigma^2 = (0.01)^2$. Quelle devrait être la valeur de μ de sorte que la probabilité qu'une pièce prise au hasard ait un diamètre supérieur à 3 cm, soit inférieur à 0.01?

Exercice 12 Loi Normale

On envisage de construire à l'entrée d'une caserne une guérite dans laquelle pourra s'abriter la sentinelle en cas d'intempéries. Les sentinelles sont des appelés dont la taille est approximativement distribuée selon une loi normale d'espérance 175cm et d'écart-type 7cm. A quelle hauteur minimale doit se trouver le toit de la guérite, pour qu'un sentinelle pris au hasard ait une probabilité supérieure à 0.95 de s'y tenir debout?

Exercice 13 Loi de Laplace

Soit $c > 0$, une constante réelle. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{c}{2} e^{-c|x|}$$

1. Montrer que f est une densité d'une v.a. X . Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
2. Déterminer la fonction de répartition F de X . Tracer l'allure de la courbe représentative de F .
3. On admet que X admet une espérance. Calculer $E(X)$.
4. Plus généralement, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^2$, X^n admet une espérance. Calculer $E(X^n)$.
5. En déduire que X admet une variance $V(X)$ et la calculer.
6. Déterminer la loi de $Y = |X|$.

Exercice 14 Fonction Gamma (Euler)

La fonction Gamma est définie sur \mathbb{R}_+^* par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$.
2. Exprimer $\Gamma(x+n)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\Gamma(1)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En utilisant le changement de variable $t = u^2$, montrer qu'on a:

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du$$

5. On suppose que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Calculer alors $\Gamma(\frac{1}{2})$.

6. Montrer que $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots (\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$
7. En déduire la valeur de $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.

Exercice 15 Loi Gamma

Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, deux constantes réelles, on définit la fonction $f_{a,\lambda}$ sur \mathbb{R} par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Montrer que $f_{a,\lambda}$ est bien une densité d'une v.a. X .
2. Calculer $E(X)$.

Exercice 16 Loi de Rayleigh

On dit que X suit la loi de Rayleigh si elle admet une densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Vérifier que f est une densité et tracer l'allure de sa courbe représentative.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. On admet que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
4. On pose $Y = X^2$. Montrer que Y suit une loi exponentielle et préciser le paramètre.

Couple de variables aléatoires continues

Exercice 17 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité jointe est définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha x e^{-y} & \text{si } x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer α pour que $f(x, y)$ soit une fonction de densité.

2. Déterminer les densités marginales de X et Y .
3. X et Y sont elles indépendantes?

Exercice 18 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire uniformément distribué dans l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 2] \text{ et } y \in [0, 4]\}$$

1. Déterminer la densité jointe du couple de variables aléatoires (X, Y) .
2. Calculer $P(X \leq 1, Y \leq 2)$.
3. Déterminer les densités marginales de X et Y . Les v.a. X et Y sont elles indépendantes?

Exercice 19 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2]$ de \mathbb{R} .

1. Quelle est la loi de probabilité de $S = X + Y$?
2. Calculez $E(S)$ et $V(S)$.
3. Quelle est la loi de probabilité de $Z = XY$?
4. Calculez $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 20 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité jointe est définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f(x, y)$ est bien une fonction de densité.
2. Déterminer les densités marginales de X et Y . Les v.a. X et Y sont elles indépendantes?
3. Déterminer $f_{X|Y=y}(x)$, la densité de X conditionnelle à $Y = y$. Vérifier qu'il s'agit bien d'une fonction de densité.