

Variables aléatoires continues

Lois usuelles continues

Mohamad Ghassany

ESILV

Variables aléatoires continues: Rappel

- X est une **variable aléatoire continue** s'il existe une **densité** f non négative t.q.

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

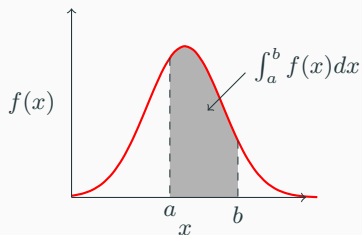


Figure 1: $P(a \leq X \leq b) = \text{surface grisée}$

Fonction de répartition des V.A.Continues

- Définition: $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$
- f est le dérivé de F
- $F'_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = f(x)$
- $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx$

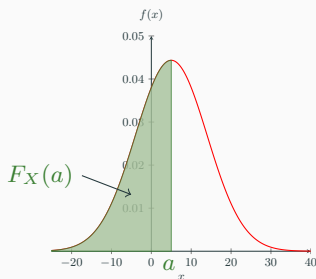


Figure 2: $F_X(a) = P(X < a) =$ L'aire hachurée en vert

Espérance:

$$\cdot E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\cdot E(aX + b) = aE(X) + b \quad a \geq 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

Théorème de transfert:

$$\cdot E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$\cdot \text{e.g. } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

Variance:

$$\cdot V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\cdot V(X) \geq 0$$

$$\cdot \forall (a, b) \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Loi Usuelle de Variables Aléatoires Continues

Définition

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ avec $a < b$ si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases} = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

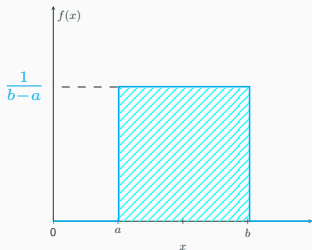


Figure 3: Fonction de densité de $U([a, b])$

- La *fonction de répartition* associée à la loi uniforme continue est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{b+a}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X est **exponentielle** (ou suit la loi exponentielle) de paramètre λ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

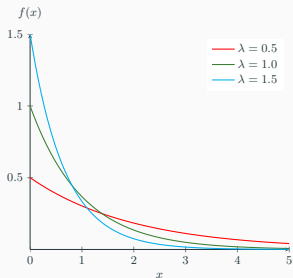
On dit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

- La fonction de répartition F d'une variable aléatoire exponentielle est donnée par

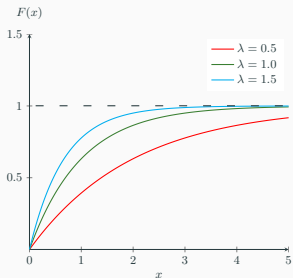
$$\text{Si } x \geq 0 \quad F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$



(a) Représentation graphique de la densité d'une loi exponentielle



(b) Représentation graphique de la fonction de répartition d'une loi exponentielle

Cas d'utilisations de la loi exponentielle:

- Représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.
- Modéliser la durée de vie d'un phénomène **sans mémoire**, ou sans vieillissement, ou sans usure.
- On dit qu'une variable aléatoire non négative X est *sans mémoire* lorsque

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h) \quad \forall t, h \geq 0$$

- Par exemple, la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique.

Loi Normale ou de Laplace-Gauss $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition

Une variable aléatoire X est dite **normale** avec paramètres μ et σ^2 si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$. On dit que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Moments de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Densité de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- La fonction f est paire autour d'un axe de symétrie $x = \mu$ car $f(x + \mu) = f(\mu - x)$.
- $f'(x) = 0$ pour $x = \mu$, $f'(x) < 0$ pour $x < \mu$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \mu$

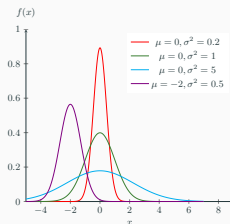


Figure 5: **Remarque:** Le paramètre μ représente l'axe de symétrie et σ le degré d'aplatissement de la courbe de la loi normale dont la forme est celle d'une courbe en cloche.

Théorème

- $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$
- $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
- X_1 et X_2 sont indépendantes.

Alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Définition

Une variable aléatoire continue X suit une **loi normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On dit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Moments de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$

- $E(X) = 0$
- $V(X) = 1$

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

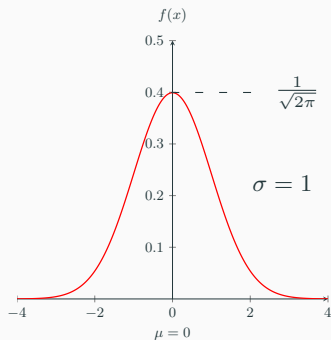


Figure 6: Densité d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

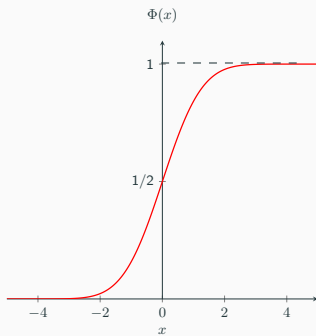


Figure 7: Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$

Relation entre loi normale et loi normale centrée réduite

Théorème

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable centrée réduite qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

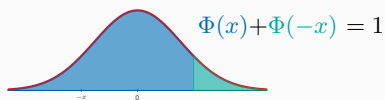
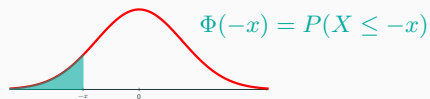
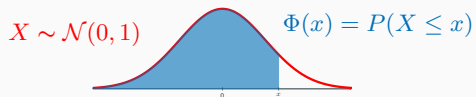
La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite permet d'obtenir les probabilités associées à toutes variables aléatoires normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ après transformation en variable centrée réduite.

Définition

On appelle fonction Φ , la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$



Propriétés de Φ

Les propriétés associées à la fonction de répartition Φ sont:

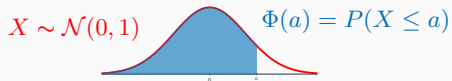
1. Φ est croissante, continue et dérivable sur \mathbb{R} et vérifie:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

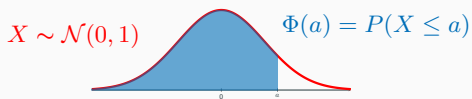
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$

Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.
.
.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
.
.
.
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$



a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Par exemple, pour $x = 1.23$ (intersection de la ligne 1.2 et de la colonne 0.03), on obtient : $\Phi(1.23) \approx 0.8907$.

Exemple 1

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Calculer:

1. $P(X > 2)$
2. $P(2 < X < 5)$

Exemple 2

Soit X une variable aléatoire normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 4$.
Calculer:

1. $P(X > 0)$
2. $P(2 < X < 5)$
3. $P(|X - 3| > 4)$

Approximation normale d'une répartition binomiale

Théorème de Moivre Laplace

On suppose que pour tout n , X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$.

Alors la variable $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Ce résultat a été progressivement généralisé par Laplace, Gauss et d'autres pour devenir le théorème actuellement connu comme théorème centrale limite qui est un des deux résultats les plus importants de la théorie de probabilités.
- En pratique de très nombreux phénomènes aléatoires suivent approximativement une distribution normale.

Approximation normale d'une répartition binomiale

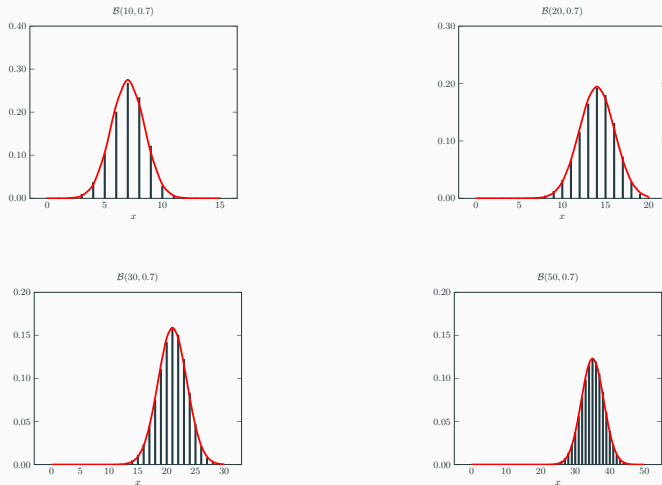


Figure 8: La loi de probabilité d'une variable aléatoire $\mathcal{B}(n, p)$ devient de plus en plus "normale" à mesure que n augmente.

Lois déduites de la loi normale

Définition

Soit X_1, X_2, \dots, X_n , n variables **normales centrées réduites**, et Y la variable aléatoire définie par

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_i^2 + \dots + X_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

On dit que Y suit la loi de χ^2 (ou loi de Pearson) à n degrés de liberté, $Y \sim \chi^2(n)$

- La loi de χ^2 trouve de nombreuses applications dans le cadre de la comparaison de proportions, des tests de conformité d'une distribution observée à une distribution théorique et le test d'indépendance de deux caractères qualitatifs. Ce sont les *tests du khi-deux*.
- **Remarque:** Si $n = 1$, la variable du χ^2 correspond au carré d'une variable normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Définition

Soit U une variable aléatoire suivant une loi **normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0, 1)$ et V une variable aléatoire suivant une loi de $\chi^2(n)$, U et V étant indépendantes, on dit alors que $T_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ suit une **loi de Student** à n degrés de liberté. $T_n \sim St(n)$

- La loi de Student est utilisée lors des tests de comparaison de paramètres comme la moyenne et dans l'estimation de paramètres de la population à partir de données sur un échantillon (**Test de Student**).

Définition

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de χ^2 respectivement à n et m degrés de liberté.

On dit que $F = \frac{U/n}{V/m}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à (n, m) degrés de liberté. $F \sim \mathcal{F}(n, m)$

- La loi de Fisher-Snedecor est utilisée pour comparer deux variances observées et sert surtout dans les très nombreux tests d'analyse de variance et de covariance.

Quelques références – interactives

- A visual introduction to probability and statistics:
<http://students.brown.edu/seeing-theory/>
- Distribution Calculator:
https://gallery.shinyapps.io/dist_calc/

Couple de variables aléatoires

Couple de v.a. discrètes

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$

- Probabilité conjointe:

$$p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j), \quad p_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$$

- Loi marginale de X :

$$p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^k p_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, l$$

- Loi marginale de Y :

$$p_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^l p_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$:

$$p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X=x_i; Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, l$$

- Indépendance:

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \forall i = 1, 2, \dots, l \text{ et } j = 1, 2, \dots, k$$

Densité conjointe

On dit que (X, Y) est un couple aléatoire continu s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $D \subseteq \mathbb{R}^2$ on a

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(x,y) \in D} f(x, y) dx dy$$

- On a la condition de normalité $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$
- Notons par A et B deux ensembles de nombres réels. En définissant $D = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$, on obtient

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f(x, y) dx dy$$

Fonction de répartition

La fonction de répartition du (X, Y) est définie par

$$F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) dx dy$$

- f est le dérivé de F : $f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b)$

Densités marginales

- Densité marginale de X :

$$f(x, \cdot) = f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

- Densité marginale de Y :

$$f(\cdot, y) = f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

Espérance:

$$E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

Exemple: $E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dx dy$

Indépendance:

Les v.a. X et Y sont indépendantes ssi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Distribution conditionnelle:

Densité conditionnelle de X , sous la condition $Y = y$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Exemple 1

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que:

1. f est une densité.
2. $P(X > 1, Y < 1) = e^{-1}(1 - e^{-2})$
3. $P(X < a) = 1 - e^{-a}$
4. $P(X < Y) = 1/3$
5. $E(XY) = 1/2$
6. X et Y sont indépendantes.

Exemple 2

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x, y) = \begin{cases} axy^2 & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver la constante a .
2. Trouver les densités marginales de X et Y .
3. X et Y sont elles indépendantes?

Exemple 3

Supposons que X et Y aient pour densité conjointe

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité conditionnelle de X lorsque $Y = y$.
2. Calculer $P(X > 1 | Y = y)$